Bollettino Unione Matematica Italiana

Alessandro Ossicini

Funzioni di Legendre di seconda specie e polinomi ultrasferici.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.3, p. 304–309.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_3_304_0>

Funzioni di Legendre di seconda specie e polinomi ultrasferici.

Nota di ALESSANDRO OSSICINI (a Roma).

Sunto. - *Si determinano alcuni sviluppi, in cui intervengono i polinomi ultrasferici e le funzioni di* LEGENDRE *di seconda specie, mediante trasformazioni di* LAPLACE *su sviluppi noti.*

1. In una nota precedente (¹) abbiamo determinato la funzione generatrice del prodotto di due polinomi ultrasferici, ed abbiamo visto che essa ha, tra i suoi fattori, la funzione di LEGENDRE di seconda specie. In questa nota mostreremo come queste funzioni siano legate ai polinomi ultrasferici determinando alcuni sviluppi in cui intervengono contemporaneamente.

2. Dallo sviluppo di GEGENBAUER-SONINE (²) $\left(\lambda > -\frac{1}{2},\ |x| < 1\right)$

$$\frac{J_\lambda(z\sqrt{2(1-x)})}{(z\sqrt{2(1-x)})^\lambda} = 2^\lambda\Gamma(\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+n)\left[\frac{J_{\lambda+n}(z)}{z^\lambda}\right]^2 P_n^{(\lambda)}(x), \tag{2.1}$$

abbiamo

$$\int_0^\infty \frac{e^{-az}z^\lambda J_\lambda(z\sqrt{2(1-x)})dz}{(\sqrt{2(1-x)})^\lambda} = \tag{2.2}$$
$$= 2^\lambda\Gamma(\lambda)\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda+n)P_n^{(\lambda)}(x)\int_0^\infty e^{-az}\left[J_{\lambda+n}(z)\right]^2 dz.$$

Se teniamo conto della (³) $(\lambda > -\frac{1}{2},\ a > 0)$

$$\int_0^\infty e^{-a^2z^2}J_\lambda(bz)J_\lambda(cz)dz = \frac{1}{\pi\sqrt{bc}}\,Q_{\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2bc}\right), \tag{2.3}$$

(¹) A. OSSICINI, *Funzione generatrice dei prodotti di due polinomi ultrasferici*, «Boll. Un. Mat. It.», (1952), Serie III, Anno VI, Num. 3, pp. 315-320.

(²) G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, (Cambridge, 1948), p. 366.

(³) G. N. WATSON, op. cit. (²), p. 389.

e della (4) $\left(\lambda > -\frac{1}{2},\ a > 0\right)$

$$\int_0^\infty e^{-az} J_\lambda(bz) z^\lambda dz = \frac{(2b)^\lambda \Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(a^2+b^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}}, \tag{2.4}$$

otteniamo dalla (2.2)

$$\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{[a^2+2(1-x)]^{\lambda+\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{n=0}^\infty (\lambda+n) Q_{n+\lambda-\frac{1}{2}}\left(\frac{a^2}{2}+1\right) P_n^{(\lambda)}(x).$$

Posto $z = \frac{a^2}{2}+1$, si conclude $(|z|>1,\ \ |x| \leq 1)$

$$\frac{1}{[z-x]^{\lambda+\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\lambda+\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)} \sum_{n=0}^\infty (\lambda+n) Q_{n+\lambda-\frac{1}{2}}(z) P_n^{(\lambda)}(x). \tag{2.5}$$

Per $\lambda = \frac{1}{2}$ la (2.5) ci dà il noto sviluppo di HEINE (5) $(|z|>1,\ |x| \leq 1)$

$$\frac{1}{z-x} = \sum_{n=0}^\infty (2n+1) Q_n(z) P_n(x),$$

ove $P_n(x) = P_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}(x)$ indica il polinomio di LEGENDRE.

3. Considerato lo sviluppo di BAUER-GEGENBAUER (6)

$$\frac{J_{\lambda-\frac{1}{2}}(z \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi') e^{iz\cos\varphi\cos\varphi'}}{(z \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\varphi')^{\lambda-\frac{1}{2}}} = \tag{3.1}$$

$$= \frac{2^{2\lambda}[\Gamma(\lambda)]^2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^\infty \frac{i^n (n+\lambda) n!\, J_{\lambda+n}(z)}{\Gamma(2\lambda+n) z^\lambda} P_n^{(\lambda)}(\cos\varphi) P_n^{(\lambda)}(\cos\varphi').$$

(4) G. N. WATSON, up. cit. (2), p. 386.

(5) E. W. HOBSON, *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, (Cambridge 1931), p. 62.

(6) G. N. WATSON, op. cit. (2), p. 370.

Posto $z = iz$, $x = \cos\varphi$, $y = -\cos\varphi'$, tenuto conto che (7) $P_n^{(\lambda)}(-y) = (-1)^n P_n^{(\lambda)}(y)$ ed introdotta la funzione di BESSEL di prima specie di argomento immaginario si ottiene

$$\frac{I_{\lambda-\frac{1}{2}}(z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})e^{zxy}}{(z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})^{\lambda-\frac{1}{2}}} = \tag{3.2}$$
$$= \frac{2^{2\lambda}[\Gamma(\lambda)]^2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\lambda)n!}{\Gamma(2\lambda+n)} \frac{I_{\lambda+n}(z)}{z^\lambda} P_n^{(\lambda)}(x)P_n^{(\lambda)}(y).$$

Dalla (3.2) si ha

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z(k-xy)}I_{\lambda-\frac{1}{2}}(z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})}{(\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)})^{\lambda-\frac{1}{2}}} dz = \tag{3.3}$$
$$= \frac{2^{2\lambda}[\Gamma(\lambda)]^2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\lambda)n!}{\Gamma(2\lambda+n)} P_n^{(\lambda)}(x)P_n^{(\lambda)}(y) \int_0^\infty e^{-kz} \frac{I_{\lambda+n}(z)}{\sqrt{z}} dz,$$

che a causa della (8) $(a > b > 0,\ \nu > -1)$

$$\int_0^\infty e^{-az} I_\nu(bz)dz = \frac{(a-\sqrt{a^2-b^2})^\nu}{b^\nu\sqrt{a^2-b^2}}. \tag{3.4}$$

e della formula di STEINTHAL (9) $\left(|a| > 1,\ \nu > -\frac{1}{2}\right)$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-az}I_\nu(z)dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi}} Q_{\nu-\frac{1}{2}}(a), \tag{3.5}$$

diviene

$$\frac{[k-xy-\sqrt{(k-xy)^2-(1-x^2)(1-y^2)}]^{\lambda-\frac{1}{2}}}{((1-x^2)(1-y^2))^{\lambda-\frac{1}{2}}\sqrt{(k-xy)^2-(1-x^2)(1-y^2)}} = \tag{3.6}$$
$$= \frac{2^{2\lambda}[\Gamma(\lambda)]^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+\lambda)n!}{\Gamma(2\lambda+n)} Q_{n+\lambda-\frac{1}{2}}(k)P_n^{(\lambda)}(x)P_n^{(\lambda)}(y).$$

(7) G. SANSONE, ***Equazioni differenziali nel campo reale***, parte prima seconda edizione, (Bologna 1948), p. 151.

(8) A. GHIZZETTI, *Calcolo simbolico*, (Bologna 1942), p. 288.

(9) G. N WATSON, op. cit. (2), p. 387.

Se poniamo $z \equiv k$ e utilizziamo la formula di duplicazione del LEGENDRE [10]

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2z),$$

lo sviluppo (3.6) diviene ($|z|>1$, $|x|\leq 1$, $|y|\leq 1$)

$$\frac{[z-xy-\sqrt{(z-xy)^2-(1-x^2(1-y^2)}]^{\lambda-\frac{1}{2}}}{((1-x^2)(1-y^2))^{\lambda-\frac{1}{2}}\sqrt{(z-xy)^2-(1-x)(1-y^2)}}= \tag{3.7}$$
$$=\frac{2\Gamma(\lambda)\Gamma(2\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+\lambda)n!}{\Gamma(2\lambda+n)}Q_{n+\lambda-\frac{1}{2}}(z)P_n^{(\lambda)}(x)P_n^{(\lambda)}(y).$$

4. Nel caso particolare $y=1$, lo sviluppo (3.7) si riduce allo sviluppo (2.5).

Infatti per $y=1$ si ha [11]

$$P_n^{(\lambda)}(1)=\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(2\lambda)n!} \tag{4.1}$$

$$\lim_{y\to 1}\frac{z-xy-\sqrt{(z-xy)^2-(1-x^2)(1-y^2)}}{1-y^2}=\frac{1-x^2}{2(z-x)}$$

quindi ($|z|>1$, $|x|\leq 1$)

$$\frac{1}{(z-x)^{\lambda+\frac{1}{2}}}=\frac{2^{\lambda+\frac{1}{2}}\Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)Q_{n+\lambda-\frac{1}{2}}(z)P_n^{(\lambda)}(x), \tag{2.5}$$

5. Facciamo ora una seconda applicazione della (3.5) determinando uno sviluppo nel quale intervengono i polinomi di JACOBI e la funzione di LEGENDRE di seconda specie.

Considerato il particolare sviluppo di BATEMAN [12]

$$\left(\frac{1}{2}kz\right)^{\mu-\nu}J_\nu(kz)=k^\mu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu+n)}{n!\,\Gamma(\nu+1)}(\mu+2n)J_{\mu+2n}(z)F(\mu+n,-n,\nu+1;k^2)$$

([10]) G. SANSONE, *Lezioni sulla teoria delle funzioni di una variabile complessa*, Vol. 1, (Padova, 1950), p. 186.

([11]) G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*, «Am. Math. Soc. Colloquium Publications», (New York, 1939), p. 80.

([12]) G. N. WATSON, op. cit. ([2]), p. 140.

posto $z \equiv iz$, $k^2 = \dfrac{1-x}{2}$, $\nu \equiv \alpha$, $\mu \equiv \alpha + \beta + 1$, ed introdotti i polinomi di JACOBI ([13])

$$P_n^{(\alpha\, \beta)}(x) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n\,!\,\Gamma(\alpha + 1)} F\left(n + \alpha + \beta + 1,\ -n,\ \alpha + 1,\ \frac{1-x}{2}\right)$$

si ottiene

$$(5.1) \qquad \left(\frac{1}{2}z\right)^{\beta+1} I_\alpha\left(z\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right) =$$

$$\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n + \alpha + \beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma(n + \alpha + 1)} I_{2n+\alpha+\beta+1}(z) P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$$

Se teniamo conto della (3.5) e dell'integrale HANKEL (relativo alle funzioni di BESSEL di prima specie di argomento immaginario), $(a > 0,\ |b| < a)$

$$\int_0^\infty e^{-az} I_\nu(bz) z^{\mu-1} dz = \frac{\left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^{\nu}\Gamma(\mu + \nu)}{a^\mu \Gamma(\nu + 1)} F\left(\frac{\mu + \nu}{2}, \frac{\mu + \nu + 1}{2}, \nu + 1\, \frac{b^2}{a^2}\right)$$

abbiamo dalla (5.1) moltiplicando per $\dfrac{e^{-yz}}{\sqrt{z}}$ ed integrando tra 0 e $+\infty$, $(\ |y| > 1,\ |x| \leq 1)$

$$(5.2) \qquad \frac{\Gamma\left(\alpha + \beta + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\alpha + 1)(2y)^{\alpha+\beta+\frac{3}{2}}} F\left(\frac{\alpha + \beta + \frac{3}{2}}{2}, \frac{\alpha + \beta + \frac{5}{2}}{2}, \alpha + 1,\ \frac{1-x^2}{2y^2}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n + \alpha + \beta + 1)\Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n + \alpha + 1)} Q_{2n+\alpha+\beta+\frac{1}{2}}(y) P_n^{(\alpha,\beta)}(x).$$

6. Lo sviluppo (5.2) per $\alpha = \beta = \lambda - \dfrac{1}{2}$ introdotti i polinomi ultrasferici ([14])

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma(2\lambda + n)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma(2\lambda)} P_n^{\left(\lambda - \frac{1}{2},\, \lambda - \frac{1}{2}\right)}(x)$$

([13]) G. SANSONE, op. cit. ([7]) p. 150.
([14]) G. SZEGÖ, op. cit. ([12]) p. 80.

diviene ($|y| > 1$, $|x| \leq 1$)

$$
(6.1) \qquad \begin{aligned}
&\frac{\Gamma\left(2\lambda + \frac{1}{2}\right)}{(2y)^{2\lambda+\frac{1}{2}}} F\left(\lambda + \frac{1}{4}, \lambda + \frac{3}{4}, \lambda + \frac{1}{2}, \frac{1-x}{2y^2}\right) = \\
&= \frac{2\Gamma(2\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+\lambda) Q_{2n+2\lambda-\frac{1}{2}}(y) P_n^{(\lambda)}(x).
\end{aligned}
$$

Se nello sviluppo (6.1) poniamo $x = 1$, $2\lambda = \mu$ a causa della (4.1) abbiamo

$$
(6.2) \qquad \frac{\Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right)}{(2y)^{\mu+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+\mu)}{n!} \Gamma(n+\mu) Q_{2n+\mu-\frac{1}{2}}(y)
$$

cioè lo sviluppo per funzioni di LEGENDRE di seconda specie della $y^{-\mu-\frac{1}{2}}$. Allo sviluppo (6.2) si può pervenire direttamente partendo dallo sviluppo di GEGENBAUER ([15])

$$
\left(\frac{1}{z}\right)^{\mu} = \sum \frac{(2n+\mu)\Gamma(n+\mu)}{\ldots} J_{\ldots}(z)
$$