Bollettino Unione Matematica Italiana

Emilio Gagliardo

Sul comportamento degli integrali dell'equazione differenziale non lineare $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$ con $g(x)$ crescente e $f(x)$ positiva per $|x| > M > 0$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.3, p. 309–314.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_3_309_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Sul comportamento degli integrali dell'equazione differenziale non lineare $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$ con $g(x)$ crescente e $f(x)$ positiva per $|x| > M > 0$.

Nota di EMILIO GAGLIARDO (a Genova)

Sunto. - *Si studia il comportamento asintotico degli integrali dell'equazione data, e si stabiliscono con considerazioni dirette criteri affinchè questi siano oscillanti, o affinché tendano a zero.*

1. Consideriamo l'equazione: $x''(t) + f(x)x'(t) + g(x) = 0$ *con* $f(x)$ *e* $g(x)$ *definite e continue per ogni* x *finito;* $g(x)$ *non decrescente, nulla* (soltanto) *per* $x = 0$ *ed avente ivi derivata non nulla:* $g'(0) > 0$; $f(x) > 0$ *per* $|x| > M > 0$.

Sussistono i seguenti teoremi:

TEOREMA I. - *Ogni integrale dell'equazione proposta può soltanto tendere a zero senza oscillare, oppure avere carattere oscillatorio* (con infiniti zeri).

TEOREMA II. - *Se* $f(0) < 2\sqrt{g'(0)}$ *tutti gli integrali dell'equazione considerata sono oscillanti.*

TEOREMA - III. - *Se per ogni* x *è:* $f(x) \geq 0$, *se* $f(0) > 0$, *allora tutti gli integrali tendono a zero* (oscillando o non oscillando).

TEOREMA IV. - *Se per ogni* x *è:* $f(x) \geq 0$, *se* $f(0) > 2\sqrt{g'(0)}$, *tutti gli integrali tendono a zero senza oscillare* (*).

2. Dimostrazione del teorema I

Supponiamo che l' integrale $x(t)$ sia una funzione definitivamente monotona non decrescente. Si possono presentare tre casi:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = +\infty\,; \quad \lim_{t \to +\infty} x(t) = a \neq 0\,; \quad \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0.$$

Nel primo caso essendo $f(x) > 0$, $g(x) > c > 0$, per x abbastanza grande, e: $x'(t) \geq 0$ per ipotesi, dall'equazione stessa segue, per t abbastanza grande: $x''(t) < -c < 0$ e quindi $x'(t) - x'(t_0) < -c(t - t_0)$ (per $t > t_0$ abb. grande) e quindi $x'(t)$ finirebbe col diventare negativo contro l'ipotesi.

Nel secondo caso dall'identità:

$$x'(t) = x'(t_0) - \int_{x_0}^{x} f(u)du - \int_{t_0}^{t} g(x(s))ds$$

facendo $t \to +\infty$ e quindi $x(t) \to a \neq 0$, $g(x(t)) \to g(a) \neq 0$ si ha:

$$\lim_{t \to +\infty} x'(t) = x'(t_0) - \int_{x_0}^{a} f(x)dx - \int_{t_0}^{\infty} g(x(t))dt = \pm\infty$$

valendo il segno $+$ o $-$ secondochè è $g(a) < 0$ oppure > 0.

Il segno $-$ contrasta con l'ipotesi $x'(t) \geq 0$; e anche se si ritiene $\lim_{t \to +\infty} x'(t) = +\infty$ si giunge ad un assurdo perchè se così fosse la curva $x(t)$ resterebbe, per t abbastanza grande, tutta al di sopra di una opportuna retta di coefficiente direttivo positivo, e la x non potrebbe tendere ad un valore finito ($= a$) come invece si è supposto.

Se ne conclude che supponendo $x(t)$ non decrescente è necessariamente: $\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$.

Allo stesso risultato si perviene analogamente supponendo $x(t)$ non crescente.

Se invece $x(t)$ non è monotono, avrà infiniti massimi e minimi; ma dall'equazione, ponendo $x'(t) = 0$, si ha: $x''(t) + g(x) = 0$ e avendo

(*) Queste considerazioni sono collegate ad un corso del Prof. F. SBRANA e qui colgo l'occasione per ringraziarlo.

$g(x)$ lo stesso segno di x ne segue che i massimi sono non negativi e i minimi non positivi. Ci sono quindi infiniti zeri a destra di un valore t_0 comunque grande.

(Se è applicabile il teorema di unicità, escludendo la soluzione identicamente nulla, questi zeri sono semplici ed hanno come unico punto di accumulazione l'infinito).

3. Dimostrazione del teorema II.

È sufficiente dimostrare che nell'ipotesi del teorema è assurdo che un integrale $x(t)$ tenda a zero monotonamente. (Escludendo $x \equiv 0$).

Supponiamo per assurdo che ad esempio un integrale $x(t)$ sia positivo, non crescente, infinitesimo, (per $t \geq t_*$).

Chiamiamo c una costante positiva (certo esistente) tale che: $f(0) < c < 2\sqrt{g'(0)}$; e quindi: $c^2 < 4\,g'(0)$, e anche: $c^2 < 4g'(0) - 8\varepsilon$ con ε positivo conveniente.

Si potrà ora trovare un valore $t_1 \geq t_*$ tale che per $t \geq t_1$ risultando x piccolo e positivo, e ricordando che $g(0) = 0$, $f(0) < c$, si abbia: $g(x) > (g'(0) - \varepsilon)x$; $f(x) < c$; e quindi, tenendo conto delle disuguaglianze precedenti,: $g(x) > \left(\frac{c^2}{4} + \varepsilon\right)x$.

L'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti:

$$\bar{x}''(t) + c\bar{x}'(t) + \left(\frac{c^2}{4} + \varepsilon\right)\bar{x}(t) = 0 \qquad (c,\ \varepsilon > 0) \tag{1}$$

ha tutti i suoi integrali oscillanti, e quindi assegnando i valori (iniziali) per $t = t_1$: $\bar{x}(t_1) = \frac{1}{2}x(t_1)$; $\bar{x}'(t_1) = 0$, l'integrale $\bar{x}(t)$ della (1) riesce, come subito si vede, positivo in un intervallo (t_0, t_2) contenente t_1, nullo agli estremi, crescente tra t_0 e t_1, decrescente tra t_1 e t_2.

Consideriamo soltanto la parte della curva $x(t)$ a destra di t_1 (ivi è $x(t)$ positivo non crescente infinitesimo), e soltanto l'arco della curva $\bar{x}(t)$ compreso tra i due zeri t_0 e t_2 (i suoi punti hanno tutti ordinata positiva e minore di $x(t_1)$). Spostando questo arco con una traslazione orizzontale verso destra esso risulterà definitivamente intersecato dalla parte considerata della curva $x(t)$, mentre spostandolo verso sinistra l'allacciamento scomparirà definitivamente; ci sarà quindi una posizione intermedia per cui non ci sia allacciamento ma solo tangenza [1]. Si noti che effettuata que-

[1] In una posizione di non allacciamento considero la distanza tra ciascun punto dell'arco $\bar{x}(t)$ e il punto della $x(t)$ di eguale ordinata; essa è definita salvo che negli estremi dell'arco ove diventa $+\infty$; il suo valore minimo dà l'ampiezza della traslazione da effettuarsi.

sta traslazione l'arco della curva $x(t)$ è ancora integrale della (1) essendo questa lineare omogenea a coefficienti costanti. (Chiamiamo ancora $\bar{x}(t)$ l'arco già spostato). Possiamo quindi ridurci al caso: (con opportuni $t_5 > t_3 \geq t_*) x(t_3) = \bar{x}(t_3) > 0$; $x'(t_3) = \bar{x}'(t_3) \leq 0$; $x(t) \geq \bar{x}(t)$ per $t_3 \leq t \leq t_5$; $\bar{x}(t_5) = 0$. Ma siccome per $t = t_5$ è $x(t_5) > 0$. dovrà esistere pel teorema del valor medio applicato alla funzione $x(t) - \bar{x}(t)$ un valore t_4 compreso tra t_3 e t_5 ove sia $x'(t_4) > \bar{x}'(t_4)$. Nell'intervallo (t_3, t_4) i valori assunti dalle funzioni $x(t)$, $\bar{x}(t)$ sono tutti positivi e minori di $x(t_1)$ e quindi sussistono le disuguaglianze che si erano precedentemente dimostrate: $f(x) < c$; $g(x) > \left(\frac{c^2}{4} + \varepsilon\right) x$ $(c, \varepsilon > 0)$ dalla seconda di queste, essendo $x(t) \geq \bar{x}(t)$, nell'intervallo (t_3, t_4), segue: $g(x(t)) > \left(\frac{c^2}{4} + \varepsilon\right) \bar{x}(t)$.

Essendo $c > 0$; $\bar{x}(t_4) \leq x(t_4) \leq x(t_3) = \bar{x}(t_3)$ si ha:

$$\int_{\bar{x}(t_4)}^{\bar{x}(t_3)} c\,dx \geq \int_{x(t_4)}^{x(t_3)} c\,dx \geq \int_{x(t_4)}^{x(t_3)} f(x)\,dx$$

Integriamo ora ambo i membri delle equazioni soddisfatte da $x(t)$, $\bar{x}(t)$ tra t_3 e t_4 ottenendo:

$$x'(t_4) - x'(t_3) - \int_{x(t_4)}^{x(t_3)} f(x)\,dx + \int_{t_3}^{t_4} g(x(t))\,dt = 0$$

$$\bar{x}'(t_4) - \bar{x}'(t_3) - \int_{\bar{x}(t_4)}^{\bar{x}(t_3)} c\,dx + \int_{t_3}^{t_4} \left(\frac{c^2}{4} + \varepsilon\right) \bar{x}(t)\,dt = 0$$

Confrontando termine a termine queste due eguaglianze, tenendo conto di tutte le disuguaglianze precedenti si giunge immediatamente ad un assurdo.

Analogamente si ragiona supponendo per assurdo $x(t) < 0$ non decrescente infinitesimo.

Resta così dimostrato il teorema II.

4. Dimostrazione del teorema III.

Dall'equazione: $x''(t) + f(x)x'(t) + g(x) = 0$ moltiplicando per $x'(t)dt$ e integrando si ottiene:

$$\left[\frac{1}{2} x'^2(t)\right]_{t_0}^{t_1} + \int_{x_0}^{x_1} g(x)\,dx = -\int_{t_0}^{t_1} f(x(t))[x'(t)]^2\,dt$$

Ponendo: $G(x) = \int_0^x g(u)du$; $E(t) = \frac{1}{2}[x'(t)]^2 + G(x(t))$ l'eguaglianza precedente diventa:

$$(2) \qquad -E(t_1) + E(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t))[x'(t)]^2 dt$$

ossia, essendo per ipotesi $f(x) \geq 0$, la $E(t)$ è non crescente; e avendo per ipotesi $g(x)$ lo stesso segno di x, ed essendo $g(x) = 0$ soltanto per $x = 0$, ne segue $G(x) \geq 0$, nulla soltanto per $x = 0$ e crescente al crescere di $|x|$. La $E(t)$ risulta quindi ≥ 0.

Nei massimi e nei minimi $E(t)$ si identifica con $G(x)$ e quindi i massimi sono non crescenti e i minimi non decrescenti. Se i massimi tendono a zero dovrà tendere a zero anche $E(t)$ e così pure i minimi. e quindi il teorema sarebbe dimostrato.

Supponiamo invece per assurdo che i massimi tendano, non crescendo, ad un limite positivo q. Nei tratti ove $x(t)$ varia da uno zero ad un massimo senza altri zeri o estremi intermedi, è $x'(t) \geq 0$, e non crescente come risulta dall'equazione.

Per ipotesi è: $f(0) > 0$, e quindi: $f(x) > c > 0$ per $0 \leq x \leq m < q$, con c, m opportuni > 0. Consideriamo soltanto i tratti A_iB_i ove $x(t)$ cresce da uno zero al valore m (con derivata positiva non crescente); nei punti B_i ove terminano questi tratti è: $x = m$, $E = \frac{1}{2}[x'(t)]^2 + G(m)$ e quindi i valori di $x'(t)$ calcolati in questi punti B_i sono (positivi) non crescenti, e avranno quindi limite ≥ 0, anzi possiamo escludere il segno $=$, altrimenti in essi la E tenderebbe a $G(m)$ mentre noi sappiamo che $E(t)$, non crescente, deve assumere (nei massimi di $x(t)$) valori superiori o eguali al valore (fisso) $G(q)$ che è $> G(m)$ (essendo $q > m > 0$). I valori di $x'(t)$ nei punti B_i saranno quindi tutti maggiori di una costante positiva k, e tali pure saranno in tutti questi tratti A_iB_i (essendo ivi x' non crescente), ed è pure in essi, come si è visto, $f(x) > c > 0$.

Si può ora minorare il secondo membro della (2) estendendo l'integrale (il cui integrando è ≥ 0) ai soli (infiniti) tratti A_iB_i ma l'integrale esteso a uno qualunque di questi tratti è:

$$\int_{A_i}^{B_i} f(x(t))[x'(t)]^2 dt = \int_0^m f(x)x'dx > ck\int_0^m dx = ckm > 0$$

(ove si pensi $x'(t)$ funzione di x tramite l'inversa della funzione $x(t)$ che nel tratto A_iB_i è crescente e quindi invertibile).

E quindi per t_1 abbastanza grande il secondo membro della (2) diventerebbe comunque grande mentre il primo membro deve restare limitato.

Essendo giunti ad un assurdo il teorema III resta dimostrato.

5. Dimostrazione del teorema IV

Supponiamo per assurdo che un integrale $x(t)$ tenda a zero oscillando (con infiniti zeri).

Chiamiamo c una costante positiva (certo esistente) tale che si abbia: $0 < 2\sqrt{g'(0)} < c < f(0)$, e quindi: $4g'(0) < c^2$, e anche: $4g'(0) + 8\varepsilon < c^2$ con $\varepsilon > 0$ conveniente. Essendo $g(0) = 0$, $f(0) > c$, si avrà per $0 < x \leq x_0$ (x_0 conveniente): $f(x) > c$; $g(x) < (g'(0) + \varepsilon)x$ e quindi $g(x) < \left(\frac{c^2}{4} - \varepsilon\right)x$.

L'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti: $\bar{x}''(t) + c\bar{x}'(t) + \left(\frac{c^2}{4} - \varepsilon\right)\bar{x}(t) = 0$ $(c, \ \varepsilon > 0)$ possiede integrali $\bar{x}(t)$ decrescenti infinitesimi, consideriamone uno siffatto a partire da un valore t_0 per cui si abbia: $\bar{x}(t_0) = x_0$; a destra di t_0 saranno quindi valide le disuguaglianze precedentemente dimostrate. Consideriamo un arco dell'integrale $x(t)$ in esame (che abbiamo supposto tendere a zero oscillando — per assurdo) compreso tra due zeri consecutivi in modo che tra essi sia: $0 < x(t) < x_0$. Spostando con una opportuna traslazione orizzontale il tratto dell'integrale $\bar{x}(t)$ considerato (ove cioè $\bar{x} \leq x_0$) analogamente a quanto si è fatto per dimostrare il teorema II, possiamo ridurci ad avere: $x(t_1) = \bar{x}(t_1)$; $x'(t_1) = \bar{x}'(t_1)$; $x(t_3) = 0$; $0 < x(t) \leq \bar{x}(t) \leq x_0$ per $t_1 \leq t < t_3$. Poichè $\bar{x}(t) \to 0$ ma resta positivo anche per $t = t_3$ esisterà un valore t_2 tra t_1 e t_3 per cui: $x'(t_2) < \bar{x}'(t_2)$. Integrando tra t_1 e t_2 entrambi i membri delle equazioni soddisfatte da $x(t)$, e da $\bar{x}(t)$, e confrontando termine a termine ciò che si ottiene, si giunge, analogamente a quanto si è fatto pel teorema II, ad un assurdo. Il teorema IV è così dimostrato.