Bollettino
Unione Matematica Italiana

Angiolo Procissi

Gli studi di Enrico Betti sulla teoria di Galois nella corrispondenza Betti-Libri.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.3, p. 315–328.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_3_315_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

Gli studi di Enrico Betti sulla Teoria di Galois nella corrispondenza Betti-Libri.

Nota di ANGIOLO PROCISSI (a Firenze).

Sunto. - *Si pubblicano tre lettere del carteggio* BETTI-LIBRI *relativi alle memorie di* BETTI *contenenti la prima dimostrazione del teorema enunciato da* GALOIS *sulla risolubilità per radicali di una equazione algebrica irriducibile di grado primo.*

1. L'esame delle carte di G. LIBRI [1], conservate nel Fondo Palagi della Moreniana di Firenze mi ha permesso di rintracciare due lettere di ENRICO BETTI, dirette l'una a LUIGI RIDOLFI e l'altra a G. LIBRI.

ENRICO BETTI (1823-1892) è noto sopratutto per i suoi studi di topologia (che portarono alla scoperta dei cosidetti *numeri del Betti*) e di fisica matematica (teoria delle forze newtoniane, teoria del calore, ecc.). Però il primo decennio (1850–60) dell'operosità scientifica del BETTI, dedicato prevalentemente a studi algebrici, non rive-

[1] L'esistenza delle carte Libri alla Moreniana di Firenze, fu indicata parecchi anni addietro, da uno studioso di storia del Risorgimento, il dott. E. BENEDETTO, al prof. G. SANSONE che ne dette in vari periodi notizia a GIACOMO CANDIDO (1871-1941), all'a. del presente lavoro, e al prof. WIGGO BRUN dell'Università di Oslo.

Come risultato dell'esame delle carte Libri, sono stati finora pubblicati:

a) tre scritti di G. CANDIDO, rist. nel volume: « *Scritti Mat. di G. Candido* » Firenze, Marzocco, 1948, pp. 619-643, 646-690, 765-788;

b) uno scritto di A. PROCISSI (Boll. Un. Mat. It. 3, v. 2, 1947, pp. 46-51).

Nel gennaio di quest'anno, il prof. WIGGO BRUN con le indicazioni avute dal prof. SANSONE, e accompagnato da A. PROCISSI, ha potuto vedere quella parte del ms. della memoria di ABEL (« *Mémoire sur une propieté générale d'une classe très étendue des fonctions trascendantes* », cfr. ABEL N. H. - *Oeuvres*, nouv. éd., t. I, Christiania, 1881, pp 145-211) che era stata già esaminata dal CANDIDO al quale era sfuggito che il testo da lui esaminato (nella filza 436, inserto 2) era incompleto. Il prof. WIGGO BRUN constatò che il ms. esaminato corrispondeva a circa un terzo della memoria. Richiesto ed avuto il microfilm di questo ms., e confrontata la scrittura con quella di alcuni autografi di ABEL conservati ad Oslo, è stato riconosciuto che il ms. di Firenze è proprio di ABEL, contrariamente alla opinione di G. CANDIDO, che l'aveva ritenuto copia di mano di G. LIBRI.

In data 14 aprile 1953 il prof. WIGGO BRUN scriveva da Montpellier ste minore importanza dei successivi, giacchè attraverso vari lavori il BETTI riuscì allora a precisare numerosi punti della teoria delle equazioni algebriche. In questi lavori il BETTI « *pel primo, penetrando negli alti ed astrusi concepimenti del Galois sulla teoria delle equazioni algebriche, pose in luce la esattezza delle asserzioni contenute nella celebre lettera a Chevalier, iniziando così il movimento in quelle ricerche alle quali oggi ancora è dedicata l'attività di eminenti geometri* » Così si esprimeva nell'ottobre del 1892 ([2]) il grande algebrista FRANCESCO BRIOSCHI (1824–1897), rievocando con rapidi cenni la mirabile attività matematica del BETTI.

Le due lettere del BETTI sono della fine del 1851. Il BETTI, tornato da poco dalla campagna della prima guerra d'indipendenza, ([3]) era allora insegnante di matematica al Liceo di Pistoia. Con la prima delle due lettere ricordate il BETTI avverte il suo amico RIDOLFI di aver mandato in omaggio al LIBRI gli estratti dei lavori che fino a quel momento aveva pubblicati ([4]). Poichè la seconda delle lettere del BETTI è diretta al LIBRI, in risposta ad alcune obiezioni mosse dallo stesso LIBRI alla dimostrazione del BETTI di un teorema di GALOIS, mi sono dato premura di ricercare la lettera del LIBRI al BETTI: ciò mi è stato possibile poichè G. SANSONE mi ha avvertito che le carte del BETTI sono conservate presso la Scuola Normale Superiore di Pisa. Quivi infatti mi è stato possibile trovare la lettera desiderata che ora pubblico a completamento del carteggio BETTI–LIBRI.

2. *Lettera del 14 novembre 1851, di Enrico Betti* ([5]). (Senza in-

al prof. SANSONE chiedendo che venissero eseguite nuove ricerche per rintracciare la parte mancante del ms. di ABEL. A seguito di questa richiesta, poco dopo, A. PROCISSI, dopo avere esaminato foglio per foglio le sette cartelle ove si conservano le carte Libri, rintracciava, in una miscellanea di appunti vari (filza 437, inserto 10) i due terzi mancanti del ms. di ABEL ad eccezione di 4 foglietti (otto facciate). Anche di questa parte l'Istituto Matematico dell'Università di Firenze ha inviato il microfilm al prof. WIGGO BRUN.

([2]) Cfr. Ann. di Mat. pura ed appl. (2) 20 (1892-93) p. 256.

([3]) Ove a Curtatone e Montanara (29 maggio 1848) aveva combattuto nel Battaglione Toscano comandato dal suo Maestro, OTTAVIANO FABRIZIO MOSSOTTI (1791-1863).

([4]) Esse sono: a) *Sopra la determinazione analitica dell'effiusso dei liquidi per una piccolissima apertura* (1850); b) *Sopra la solubilità per radicali delle equazioni algebriche irriducibili di grado primo* (1851); c) *Un teorema sulle risolventi delle equazioni risolubili per radicali* (1851).

Tutte e tre queste memorie sono state ristampate in E. BETTI, *Opere Matematiche,* t. I, Milano, Hoepli, 1903, pp. 1-29.

([5]) Questa lettera è interessante, e viene qui riprodotta, anche perchè dirizzo, ma sicuramente diretta a LUIGI RIDOLFI, come appare dal testo della lettera successiva, alla quale essa è unita).

[Firenze, Moreniana, Fondo Palagi, filza 431, inserto 41, n. 1].

Amico carissimo.

Non mancai di spedire al sig. Tito del Rosso *le copie dei miei Opuscoli perchè le rimettesse al sig.* Libri, *appena che ebbi ricevuto la tua lettera gratissima che mi scrivesti da Parigi. Ma i risultati meno indegni forse di qualche attenzione, che ho potuto ottenere cercando di approfondire l'arduo problema della determinazione delle condizioni di risolubilità delle equazioni algebriche, li ho esposti in una memoria non ancora pubblicata, che ho già mandata a Roma al prof. Tortolini perchè la inserisca nei suoi Annali. In essa ho preso a trattare il problema in tutta la sua generalità e valendomi di una Teoria delle sostituzioni che ivi stabilisco con qualche novità, e sviluppando la bella Teoria del* Galois *che si trova abbozzata nel Tomo XI del* Giornale di Liouville, (6) *ritrovo tutti i teoremi lasciati senza dimostrazione dall'* Abel, *e alcuni altri necessari alla completa soluzione della questione.*

Mi rallegrano moltissimo le scoperte che si vanno facendo per mettere in luce le iniquità del processo e della sentenza di cui è stato vittima l'onore di nn uomo che è decoro della nostra scienza e della nostra patria.

Aspetto di vedere da Te pubblicato qualche cosa sugli studi fatti alla grande Esposizione di Londra.

Ti prego dei miei saluti ai tuoi fratelli.

Conservami sempre quell'amicizia che ti ha spinto a parlare dei piccoli frutti dei miei studi a un Geometra di alto valore come è il sig. Libri, *e credimi sinceramente*

tuo aff.mo amico

Pistoia, li 14 novembre 1951. *Enrico Betti*

3. *Lettera 2-3 dicembre 1851, di Guglielmo Libri ad Enrico Betti.*

[Pisa - Scuola Normale Superiore - Carteggio di E. Betti].

Nella introduzione alla sua edizione delle *Opere* di GALOIS il LIOUVILLE aveva promesso che le avrebbe fatto seguire da « *un commentaire où nous nous proposons de compléter certains passages et d'éclaircir quelques points délicats* » (7).

mette in luce quale era l'opinione dei matematici italiani dell'epoca verso l'*affare Libri*, relativamente al quale doveva esser già noto in Italia il volume: G. LIBRI, *Lettre à M. de Falloux*, Paris, Paulin, 1849.

(6) Gli scritti di EVARISTE GALOIS (1811-1832), pochissimi dei quali erano stati stampati prima della sua tragica morte, furono integralmente ristampati da JOSEPH LIOUVILLE (1809-1882) nel *Journal des Sc. Math. pures et appliquées* (1) 11 (1846), pp. 381-444.

(7) Vol. cit. alla nota precedente, p. 183.

Il commentario promesso dal LIOUVILLE, quand'anche sia stato scritto, non ha mai veduto la luce. Quattordici anni dopo la morte del LIOUVILLE, J. BERTRAND scriveva (8): « *Pour comprendre solidement l'ouvrage qu'il voulait commenter, Liouville invita quelques-amis à entendre una série de leçons sur l'oeuvre de Galois. Serret assistait à ces conferences. La Première édition de son Traité d'Algèbre Supérieure, publiée quelques années plus tard, ne disait rien sur les découvertes de Galois. Il ne se croyait pas permis, disait il dans sa preface, d'usurper les droits du maître qui l'en avait insruit. Lors de la seconde édition, quinze années s'étaient écoulées. Le projet de Liouville paraissant abandonné, Serret rédigea la théorie de Galois* «. Ma come avverte poco dopo il BERTRAND le 61 pagine consacrate dal SERRET alla teoria del GALOIS, scomparvero. su richiesta del LIOUVILLE, dalle bozze di stampa della seconda edizione de l'*Algèbre Supérieure* del Serret (9).

ENRICO BETTI é stato indubbiamente il primo a dare la dimostrazione dei teoremi che GALOIS aveva soltanto accennato, o dei quali questo precocissimo genio non aveva potuto dare per la sua morte immatura una completa dimostrazione. Ciò è stato riconosciuto infatti da CAMILLE JORDAN (1838–1922) il quale nel 1870 scriveva (10) « *dans la précipitation de sa rédaction, Galois avait laissé sans démonstration suffisante plusieurs propositions fondamentales. Cette lacune ne tarda pas à être comblée par M. Betti, dans un Mémoire important, où la série complète de ces théorèmes de Galois a été* **pour la première fois** *rigoureusement établie* ».

In particolare il GALOIS aveva affermato (11):

« *Pour qu'une équation irréduttible de degré premier soit soluble par radicaux, il faut et il suffit que deux quelconques des racines étant connues, les autres s'en déduisent rationellement* ».

La dimostrazione di questo teorema, come tante altre appena accennata dal GALOIS, si trova nel secondo dei lavori inviati in omaggio dal BETTI al LIBRI (12). A questo teorema si riferisce il LIBRI nella sua lettera che qui di seguito pubblichiamo.

(8) BERTRAND J. - *Recensione di « P. Dupuy. La vie d'Evariste Galois »* in J. BERTRAND, *Eloges académiques et Discours,* nouvelle série, Paris - Hachette, 1902, pp. 329-345 (pp. 342-343).

(9) Comparvero invero come ultimo capitolo del secondo volume della terza edizione (Paris, Gauthier-Villars, 1866, pp. 607-664).

(10) C. JORDAN - *Traité des substitutions et des équations algébriques* - Paris, Gauthier-Villars, 1870, p. VI.

(11) Cfr. ad es. E. GALOIS, *Oeuvres* (éd. Picard), Paris, Gauthier-Villars, 1897, p. 49.

(12) Cfr ad es. E. BETTI, ed. cit., v. I, pp. 22-23. Per una trattazione

Pregiatissimo Signore, *Londra 2 dicembre 1851*

á M. Libri Florence House, 3 Chepston Villas, Bayswater, á Londres (Angleterre).

Mi permetta ch' io la ringrazi direttamente degli scritti ch' Ella ha favorito inviarmi, e più ancora della lettera cortesissima da Lei diretta al Marchese Luigi Ridolfi, e che questi ha avuto la bontà di trasmettermi. La benevolenza ch' Ella mi dimostra, e della quale debbo andare superbo, non è la minore delle cagioni della gratitudine in ch' io professo per questo nostro comune amico, il quale ha dato qua un saggio veramente raro ed onorevole per la Toscana, di bontà, d' ingegno, e di modestia.

Ho letto con profitto grande, e con sentimenti di verace ammirazione i tre opuscoli ch' Ella ha voluto donarmi, e non posso dirle quanta gioia io abbia provato vedendola, benchè giovanissino, camminare da maestro in mezzo alle più ardue e più recenti dottrine inventate e promosse dall' Abel, dal Iacobi, dal Lacroix, e da altri. I lavori dei Tedeschi, i quali sotto la scorta dell' immortale Gauss hanno sì maravigliosamente ampliato i confini delle matematiche, non mi sembrano, fino a questi ultimi tempi, conosciuti abbastanza in Italia; però veggo che adesso, mercè specialmente le di lei indagini, sono non solamente conosciuti, ma aumentati e perfezionati. Riceva, la prego, le mie sincere congratulazioni, e non cessi di spingersi innanzi e d' animare i giovani geometri italiani a calcare queste nuove vie le quali promettono ampia messe di gloria a chi non teme le prime difficoltà del cammino.

La Teorica delle equazioni, della quale Ella si sta occupando con tanto successo, aveva, fino dai miei primi anni, fatto lo stesso delle mie indagini. Nel 1823 ho inviato all' Istituto di Francia una memoria nella quale io risolveva, con metodi miei propri, le equazioni a due termini, già risolute dal Gauss, e nel 1825 (essendo a Parigi) ho presentato all' istesso Istituto una altra memoria nella quale io indicava la risoluzione delle equazioni di cui le radici sono legate l' una all' altra dalle equazioni

$$r_2 = \varphi(r_1),\ r_3 = \varphi(r_2),\ \ldots r_1 = \varphi(r_n)$$

$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ *essendo le* n *radici dell' equazione proposta, e* φ *indicando una funzione razionale qualunque (veggasi in* Giornale di Crelle, *tomo X, p. 168). Nel primo volume, stampato nel 1828-29 in Firenze, delle mie* Mémoires de mathématiques et de phisique,

moderna si veda L. BIANCHI, *Lezioni sulla Teoria dei Gruppi di Sostituzioni e delle Equazioni Algebriche secondo Galois.* Pisa, Spoerri, 1899, pp. 197-198.

ritroviamo alla p. 205 due problemi i quali mostrano che fino da quell' epoca io aveva risoluto certe questioni relative alla risolubilità *(scusi il vocabolo barbaro) delle equazioni. Ma queste, ed altre indagini sullo stesso argomento (alcune delle quali furono molti anni addietro menzionate con lode da M. Liouville in un suo scritto, prima che per motivi politici, ecc., diventasse mio acerrimo nemico) mi furon tolte, con* tutti *i miei scritti, e con* tutti *i miei libri, con* tutti *i miei studi ed appunti, con* tutte *le cose mie insomma, da chi (per usare le parole di Michelangiolo)* mi ha tolto la roba e l'onore, e più mi chiama ladro! *Per tre anni occupato unicamente d'una lotta accanita e mortale, ho lasciato da parte gli studi; ma appena la voce dei buoni in Inghilterra, in Germania, e in Italia, facendosi sentire coltamente mi ha permesso di rifiatare un poco, e di allontanare lo sguardo dalle sozzure nelle quali voleasi coinvolgermi, che la mente mia è corsa agli antichi e diletti studi troppo lungamente interrotti. Benchè la poca salute, la mancanza dei libri e la necessità di cercar di nuovo tutto ciò che io aveva anticamente trovato, fossero ognora ostacoli ai miei lavori, pure ho potuto a poco a poco riprendere il filo delle mie indagini, come un uomo che svegliandosi da un lungo letargo cercasse di ridurre alla mente le cose obliate da lungo tempo, e quasi uscite affatto dall' intelletto. Per un caso singolare una delle prime cose che ho preso a considerare si è la risoluzione delle equazioni trattate dall' Abel, delle quali io avea, alcuni anni addietro trovato la risoluzione, e quando il marchese Ridolfi mi favorì qui in Londra, avendogli io mostrato alcuni libri che andavo leggendo, e parlandogli delle equazioni dell' Abel, delle quali io avea di nuovo trovato la risoluzione, mi parlò dei suoi bei lavori sullo stesso argomento, e mi procurò quindi il modo di conoscere i di lei scritti, del che ringrazio sommamente ambedue. Come Ella sa meglio di me, è allo stesso Abel che si dee d'aver scoperto che le equazioni di cui il grado è un numero primo, e di cui le radici sono legate tra loro dall' equazione:*

$$r_3 = \varphi(r_2 \cdot r_1)$$

nella quale φ è una funzione razionale, sono sempre risolubili. Questa, ed altre proposizioni, inserite nel tomo V (pag. 342-343) del Giornale del Crelle, *furono indicate senza dimostrazione dall' Abel fino dal 1828, ed io posso dimostrarle in più modi, combinando la teorica del Gauss, col metodo ordinario per la trasformazione delle equazioni; anzi, dalle mie indagini si deducono molte altre proposizioni che non furono mai indicate nè dall' Abel nè da altri. Fin qui mi sembra che Ella ed io camminiamo perfettamente d'accordo,* *e me ne compiaccio. Ora però conviene che io le chieda il permesso d'esporle alcuni miei dubbi circa il teorema enunciato dal Gallois* [sic] *e da lei trattato di nuovo. Questo teorema fu, s' io non m'inganno, enunziato per la prima volta, senza dimostrazione con altri teoremi analoghi, dal Gallois, nel* Bulletin de Férussac *(sciences mathématiques) an 1830, t. XIII, p. 271, nei seguenti termini:*

« *Pour qu'une équation de degré premier soit résoluble par radicaux* il Faut *et il suffit que deux quelconques de ses racines étant connues, les autres se déduisent rationellement* ».

La mia difficoltà cade su questi « il Faut » *dato come condizione* sine qua non *della possibilità della risoluzione d'una equazione* de degré premier.

3 dicembre, continuazione della lettera del dì 2.

Fra le molte ragioni che potrei addurre per dar forza ai miei dubbi, sceglierò solo le seguenti:

Sia una equazione di grado n (n *essendo un numero primo) della forma*

$$X_n = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0;$$

e siano $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots, r_n$ *le radici di questa equazione, che suppongo* irriducibile *per uniformarmi a ciò che fu stabilito dall'Abel. Siano f e φ i segni per i quali si indicano due funzioni razionali in generale e suppongasi che tra le radici della equazione*

$$X_n = 0$$

esistano le condizioni, o equazioni:

$$\begin{aligned} \varphi(r_3) &= f[\varphi(r_2) \cdot \varphi(r_1)] \\ \varphi(r_4) &= f[\varphi(r_3) \cdot \varphi(r_2)] \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \varphi(r_2) &= f[\varphi(r_1) \cdot \varphi(r_n)]: \end{aligned}$$

è chiaro che potremo, pei principj noti, trasformare l'equazione $X_n = 0$ *in un'altra dello stesso grado della forma*

$$Y_n = y^n + b_1 y^{n-1} + \dots + b_n = 0$$

di cui le radici $y_1, y_2, \dots, y_n$ *saranno determinate dalle equazioni*

$$y_1 = \varphi(r_1),\ y_2 = \varphi(r_2), \dots, y_n = \varphi(r_n)$$

ed è chiaro egualmente che l'equazione $Y_n = 0$ *sarà tale che le sue radici saranno legate dalle equazioni*

$$y_3 = f(y_2 \cdot y_1),\ y_4 = f(y_3 \cdot y_1), \dots, y_2 = f(y_1 \cdot y_n).$$

Questa equazione sarà dunque risolubile (per ciò che l'Abel e il Gallois stesso hanno osservato, e per ciò ch'io stesso ho dimostrato) e potremo ottenere i valori di $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *per mezzo di radicali Ma essendo*:

$$\varphi(r_1) = y_1, \ \varphi(r_2) = y_2, \ldots, \varphi(r_n) = y_n$$

ogni volta, non potrebbe ridursi l'equazione

$$\varphi(z) = y_p \text{(13)}$$

(y_p *essendo una qualunque delle quantità note* $y_1, y_2, \ldots, y_n$*). Si avrà la risoluzione generale dell'equazione* $X_n = 0$ *perchè otterremo tutti i valori* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *che sono le radici di questa equazione* $X_n = 0$. *Ora, fra gli altri casi, l'equazione* $\varphi(z) = y_p$ *potrà ridursi ogni qual volta* φ *esprime una funzione razionale di grado minore del quinto, e se indichiamo col simbolo* $z = \Psi(y_p)$ *la relazione generale che dee esistere fra* z *e* y_n, *ovvero fra* r_3, *per esempio, e* $f[\varphi(r_2) \cdot \varphi(r_1)]$, *avremo*

$$r_3 = \Psi f[\varphi(r_2) \cdot \varphi(r_1)]$$

cioè la relazione fra r_3 *e le due altre radici* r_2, r_1; *la quale relazione (essendo* Ψ *necessariamente irrazionale per ogni funzione* φ *di grado maggiore dell'unità) sarà irrazionale ora, benchè questa equazione non sia compresa nella condizione iniziale del Gallois (con questi* il faut*), pure può incontrarsi. Lo che sembrami dimostrare la* non verità *del suo teorema.*

*Non posso qui addurre molti altri esempi ed altre riflessioni, che l'argomento mi suggerirebbe. Mi permetta però d'aggiungere che avendo l'Abel (*Crelle, t. V. p. 343*) annunziato che l'equazione di cui abbiamo parlato finora (cioè quella in cui tre radici possono esser date dall'equazione*

$$r_3 = \varphi(r_1 \cdot r_2)$$

è insolubile, non ha aggiunto ciò che il Gallois ha detto col suo il aut*; e nondimeno l'Abel ha veduto quanto mai sembrava possibile in questa via. Quanto ad equazioni di cui il grado è un numero primo e che possono risolversi senza che si vegga come le radici possano legarsi razionalmente coll'equazione*

$$r_3 = \varphi(r_2 \cdot r_1)$$

(13) Il dubbio affacciato dal Libri poggia sul presupposto che in qualcuna delle relazioni $\varphi(z) = y_p$ la z non possa esprimersi razionalmente per la y_p, e ciò dovrebbe accadere secondo il Libri quando φ fosse di grado superiore al quarto. Ma nella lettera successiva il Betti ha dimostrato che anche in questo caso tutte le radici della $X_n = 0$ si possono esprimere razionalmente per due di esse.

basterà nominare le equazioni ausiliarie del fisico Gauss nel caso in cui sono d'un grado che è numero primo. Queste equazioni ausiliarie, come Ella sa meglio di me, sono sempre risolubili per mezzo di radicali, e trattasi conforme ho creduto finora, che le radici di queste equazioni fossero legate razionalmente da una equazione nella forma

$$r_3 = \varphi(r_2 \cdot r_1).$$

Lo stesso potrebbe dirsi delle radici di certe equazioni che ho considerato nel tomo XII, pag. 245-250, del Giornale del Crelle, *e che essendo risolubili per mezzo di radicali, hanno per coefficienti le radici d'alcune congruenze indicate in quel mio scritto. Simili osservazioni potrebbero farsi intorno ad altre equazioni di cui i coefficienti dipendono da equazioni indeterminate, e che hanno per radici certe funzioni ellittiche ed* abeliane *da me considerate, ma intorno alle quali non ho ancora nulla pubblicato.*

Scusi, la prego, questa lunga lettera scritta alla buona *ed in fretta, e prenda la confidenza che io mi prendo d'esporle così rozzamente ed incoltamente i miei dubbi. Il tempo e le forze mi mancano per copiare questa lettera, scritta dopo aver ricevuto le* ultime nuove di Parigi ([14]). *Vedendo quanto poco guadagni la libertà vera (oppressa di sopra, o rovinata di sotto) dagli sconvolgimenti politici, si sente ogni dì più il pregio degli studi, solo conforto e rifugio degli uomini che provarono i giuochi mutabili della fortuna.*

Spero ch'Ella vorrà esaminare i miei dubbi e dirmi se ai suoi occhi hanno saldi fondamenti, o no. Mi parli dei suoi lavori, e sia certo di farmi piacere ed onore. Desidero ch'Ella abbia la bontà di darmi notizie di ciò che si è fatto in Italia in questi ultimi anni, relativamente alle cose matematiche, perchè qui siamo al buio, e gli Annali Scientifici di Roma *non vengono (ch'io sappia) in Londra.*

Vorrei sapere se il signor Buonazio, giovane egregio che io conobbi in Parigi, ha pubblicato alcun lavoro. S'Ella lo vede, lo saluti, di grazia, da parte mia. Il signor Tardy di Genova mi ha pregato molto gentilmente ad inviare alcun mio frutto al signor Tortolini per gli Annali di Roma, ed io spero di poterlo fare, se la mia salute resiste a questo inverno, meglio che non lo fece l'anno passato. Tuttavia sono un poco come il Gauss (al quale vorrei poter somigliare anche nel resto), il quale, animato da me a pubblicare tante sue belle scoperte che giacciono ancora nei suoi quaderni manoscritti, mi rispose « Procreare jucundum, sed parturire molestum ». *Mi comandi, e mi creda sempre con particolare stima,*

suo devotiss. servo G. Libri

([14]) 2 dicembre 1851, colpo di stato di Napoleone III.

P. S. Ella troverà il mio indirizzo dopo la data di questa lettera.

Spero che Ella vorrà continuare a favorirmi dei suoi belli scritti, che potrà sempre indirizzare (col mio indirizzo) al signor Tito Del Rosso, Via del Cocomero, n. 6152, 2° piano, in Firenze, pregandolo a mandarmeli per la via che egli conosce.

4. *Lettera del 15 dicembre 1851 di E. Betti a G. Libri.*

[Firenze, Moreniana, Fondo Palagi, filza 531, inserto 41, n. 2]

Stimatissimo Sig. Professore.

Ho ricevnto per mezzo del comune amico Marchese Ridolfi una sua gratissima del 2 o 3 corrente. Io mi trovo veramente confuso nel desiderio e nella impossibitità di esprimerLe l'effetto che in me hanno prodotto le espressioni che la sua bontà e cortesia ha usato riguardo ai piccoli frutti dei miei studi. L'acquisto della stima e della benevolenza di uno dei primi matematici del nostro secolo è la più alta ricompensa che io potessi desiderare ai miei primi lavori. Io la ringrazio vivamente e le confesso che Ella ha immensamente aumentato in me l'ardore e il coraggio per affrontare le difficoltà di nuove ricerche, le quali valgano a meritarmele e a conservarmele.

Mi hanno commosso le sue poche parole relative alla turpe persecuzione che ha dovuto soffrire con tanto danno della Scienza, alla quale, la sua tranquillità, il suo tempo e la sua roba, che così iniquamente le han tolta, avrebbero dato tanto importanti lavori. Ma si rassicuri e viva tranquillo nella sua coscienza, e nella certezza che i buoni di tutti i paesi hanno sempre mantenuta costante la stessa venerazione per Lei, e che le sozzure lanciatele contro, hanno ricoperto vergognosamente coloro dai quali son mosse.

Ho letto con attenzione e piacere la Storia che Ella mi traccia dei suoi bei lavori sul soggetto che mi occupa, e i dubbi che mi presenta sulla verità del Teorema di Galois che ho dimostrato come primo Teorema nella mia Nota, dei quali la ringrazio distintamente. Vedo dai medesimi che Ella non è soddisfatta del rigore della mia dimostrazione, e anch'io sebbene creda non sia difettosa nella sostanza, pure quando la ebbi pubblicata, mi accorsi che avrei potuto e dovuto far meglio, e seguitando a meditare sovra questo soggetto, trovai materia per un'altra memoria, che tra non molto spero che sarà pubblicata negli Annali di Tortolini, nella quale trattando la questione con la massima generalità, si deduce con molto maggior rigore e chiarezza il rammentato Teorema con gli analoghi per i casi del grado non primo. Un altro modo di dedurre il Teorema di Galois da quello di Abel, dimostrato da Malmsten è il seguente che mi viene alla mente ora appunto, e che parendomi assai semplice e chiaro, permetta che io lo sottoponga al suo giudizio.

Le funzioni delle radici $\sum_{i=0}^{i=\mu-1} \alpha^i x_{i_\rho k}$ *(vedi la nota sopra la risolubilità, ecc.) e* $F(x_i, x_{i+1})$, *dove* F *è segno di una funzione razionale, sono simili. Infatti ogni funzione simmetrica dei* $n(n-1)$ *valori che prende la prima per le sostituzioni* $\begin{pmatrix} x_i \\ x_{ai+b} \end{pmatrix}$ *è razionale dei coefficienti della proposta, per il teorema di Malmsten: e lo è pure ogni funzione simmetrica dei* $n(n-1)$ *valori che corrispondentemente prende la seconda, perchè è simmetrica anche delle radici della proposta. Dunque le prima è funzione razionale della seconda come è noto (vedi* Serret, Cours d'Algèbre Supérieure, *p. 134).* Ma *le radici si possono esprimere in funzione razionale delle* $\sum_{i=0}^{i=\mu} \alpha^i x_{i_\rho k}$; *dunque anche delle* $F(x_i x_{i-1})$ *e saranno tutte cognite razionalmente quando lo siano due qualunque tra loro, come lo vuole* Galois.

Quanto agli esempi che Ella mi adduce in contrario, non ho potuto ancora vedere quelli che mi cita dal Crelle, *perchè non lo possiedo, e bisogna che vada a Firenze alla Palatina per riscontrarlo. Quanto al primo che Ella ha sì ingegnosamente costruito, mi pare che non faccia contro la verità del teorema. Ella deduce dalla equazione* $X_n = 0$ *le radici della quale sono legate dalle relazioni*

$$\varphi(r_{i-1}) = f(\varphi(r_{i-1}), \varphi(r_{i-2}))$$

per mezzo della trasformazione di Tschirnaüs $y^i \varphi = (r_i)$ *un'altra equazione* $y_n = 0$ *la quale è risolubile per radicali perchè*

$$y_i = f(y_{i-1}, y_{i-2}).$$

Ma ora si dimostra facilmente che ogni radice di $X_n = 0$ *è funzione razionale di una di* $Y_n = 0$:

$$r_i = Ff(f(r_{i-1}), \varphi(r_{i-2})),$$

ed F *è il segno di una funzione razionale, della quale dà la forma in due differenti modi* Serret *nel suo* Corso di Algebra Superiore, *a p. 99: dunque le radici di* $X_n = 0$ *sono esprimibili per radicali, ma sono altresì funzioni razionali di due tra loro come vuole che ia necessariamente il* Galois. *Non so se per gli altri esempi a me saranno possibili le analoghe riduzioni, ma mi par certa la possibilità delle medesime per le dimostrazioni che possiedo della necessità della condizione in generale. In queste relazioni* generali *tra più quantità* irrazionali *può molte volte apparire una quantità irrazionale funzione irrazionale di due altre, e contemporaneamente esser funzione razionale delle medesime. Così se da una delle* $y_i = (y_{i-1}, y_{i-2})$ *si ricava il valore di* y_{i-2}, *si trova apparentemente dato da una* *funzione irrazionale di* y_i *e* y_i, *mentre si può, servendoci anche delle altre equazioni, determinarlo per mezzo di una funzione razionale delle medesime* y_i, y_{i-1}.

Il caso di

$$r_i = \varphi(r_{i-1})$$

non si sottrae alla condizione del Galois, *perchè questa vuole che date due radici siano cognite razionalmente le altre, e qui, data una sola incognita, l'altra, dunque a più forte ragione fossero date due*

Anche l'Abel che nei suoi lavori pubblicati nel Crelle *non fa menzione della necessità della condizione come il Galois, se la memoria non m'inganna, in una sua lettera ad Holmtöe dice di aver trovato la necessità della medesima. Ma io non posso assicurami di questo, perchè non possiedo le Opere complete di quel Geometra, dove si trova quella lettera, e debbo la lettura di quei tesori di analisi alla gentilezza del Prof Lavagna che presentemente si trova gravemente ammalato.*

Io ho sommo desiderio di sapere da Lei quanto possono valere le poche ragioni che le ho qui arrecato, di fronte ai dubbi che mi fece il favore di presentarmi; e ciò tanto più mi interessa, che avrei intenzione, se Ella lo permettesse, di far menzione delle sue osservazioni nella mia nuova memoria, nelle aggiunte e modificazioni che vi farò quando Tortolini mi manderà le prove di stampa a correggere lo che spero sarà tra non molto.

In questi ultimi tempi non si son fatte in Italia, per quanto a me pare, di quelle scoperte matematiche che aprono nuove vie da condurre a grandi risultati la scienza: pure non son mancati lavori importanti. Io procurerò di soddisfare il suo desiderio, scegliendo i principali, e che più le possono interessare.

L'ottimo mio maestro e amico O. F. Mossotti ha incominciata la pubblicazione di un Trattato di Meccanica Razionale, *il quale oltre ai pregi della chiarezza e dell'ordine che lo rendono di immenso vantaggio per l'insegnamento, contiene molte cose belle importanti e nuove. Egli ha applicato molto utilmente per la regolarità e semplicità del calcolo, e per la simmetria ed eleganza delle formule, le funzioni iperboliche che così ha divulgate in Italia dove finora non erano in uso. Ha trattato poi analiticamente la bella esperienza di Foucault, il che ha fatto anche Plana; ma Mossotti ha posto in considerazione nell'analisi che ha stabilito in un suo lavoro anche inedito, il numero delle oscillazioni, mentre tutti gli altri che hanno trattato la quistione hanno considerato una sola oscillazione.*

Il sig. Plana ha pubblicato negli Atti dell' Accademia di Torino, una nuova soluzione dell' equazione $X^n - 1 = 0$, *quando* n *è un numero primo: nella quale ha avuto in vista la facilitazione della esecuzione pratica della soluzione. Dai principi dei quali si è servito ha dedotto una nuova dimostrazione della bella legge di reciprocità di due numeri primi, scoperta da Legendre.*

Il sig. Mainardi professore nella Università di Pavia ha pubblicato nell' anno 1850 degli Annali di Tortolini *alcuni studi sulla integrazione delle equazioni differenziali, dove principalmente ha cercato di estendere l' analogia tra le equazioni algebriche e le equazioni differenziali lineari, soggetto nel quale tanto a Lei deve la scienza.*

Il prof. Tortolini al quale debbon molto le matematiche in Italia per gli Annali *che egli compila con tanto zelo, ha pubblicato molte memorie sulle applicazioni geometriche e meccaniche dei trascendenti ellittici, e sulla geometria analitica differenziale; sul qual soggetto ha pubblicato alcuni lavori importanti anche il P. Chelini.*

Il prof. Belli ha pubblicato una memoria nel Giornale dell' Istituto Lombardo, *dove applica il calcolo a verificare la ipotesi fondamentale della geognosia, la quale però io non ho ancora veduta. Non le parlerò dei lavori di Tardy che conoscerà certamente.*

Tra i giovani un Battaglini di Napoli ha pubblicato negli Annali di Tortolini *una bella soluzione di un problema di geometria analitica assai complicato. Il Felici, aiutato dal prof. Matteucci, nei medesimi* Annali *ha dato i principi di una teoria dei fenomeni di induzione elettro-dinamica che promette di riuscire assai bene.*

Nell' anno passato dovemmo, come saprà, deplorare la perdita di G. Piola. Egli aveva pubblicata negli Annali *una memoria sull' applicazione del calcolo alle differenze finite alle questioni di analisi indeterminata.*

Il sig. Buonazia, al quale ho fatto i suoi saluti, m' incarica di ringraziarla della bontà che conserva per lui, e di esporle anche da parte sua quanto tutti quelli che la conoscono sono addolorati e indignati della persecuzione che ha dovuto soffrire. Egli mi dice di conservare tanta riconoscenza per Lei, e con affetto che è cresciuto col crescere delle persecuzioni a Lei mosse. Egli presentò alcune sue cose all' Accademia di Torino *avanti il 1848: dopo quella epoca non ha avuto più modo di far nulla, ora però spera di riprendere alcuni dei lavori interrotti. Mi fa molto piacere il sentire come Ella ha intenzione di mandare qualche suo lavoro agli* Annali di Tortolini, *se la salute le resiste in questo inverno, per il che io fo ardenti voti. Non sarà poco acquisto il suo nome per il credito del Giornale. Io vorrei che la bella numerosa ed immortal figliolanza* *di scoperte scientifiche che hanno già dato alla luce il Gauss e Lei, non fosse cagione che risentissero tanto le piccole molestie che vi potrebbero esser per loro nel dare alla luce nuovi prodotti, e che quindi non ci privassero di tanti tesori nascosti nei loro manoscritti.*

La prego a continuarmi la sua benevolenza, a seguitare ad ammaestrarmi ed onorarmi delle sue osservazioni, per dirigermi nei miei studi; e assicurandola della mia venerazione per la sua mente e il suo carattere, mi protesto

suo dev.mo servo Enrico Betti.

Pistoia, li 15 dicembre 1851.

A M. le Professeur Guillaume Libri Florence House, 3 Chepston Villas, Bayswater, à Londres, (Ang'eterre)

5. S'intuisce facilmente che la scuola d'Algebra Superiore, fiorita per lunghi anni a Pisa per opera del grande edificatore delle geometria differenziale classica LUIGI BIANCHI (1856-1928) può farsi risalire per la sua ispirazione ad ENRICO BETTI.

VITO VOLTERRA (1860-1940), altro famoso scolaro del BETTI, insieme al DINI (1845-1918) e al BIANCHI, riferendo sul decennio 1850-1860 dedicato dal BETTI alle ricerche algebriche, scriveva [15] che queste « *per prime diedero fama al suo nome e lo collocarono tra quelli che fecero maggiormente progredire le teorie create da Abel e da Galois e lasciate da questi grandi geometri incomplete, poco note e non ben chiare alla maggior parte dei matematici delle loro epoca. Le opere del Betti su questo argomento hanno già da lungo tempo preso posto accanto ai classici lavori dei più chiari matematici dei nostri*