LUIGI TENCA

Particolari campi a tre dimensioni cubabili esattamente limitati da superfici curve.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.3, p. 337–342.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_3_337_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Particolari campi a tre dimensioni cubabili esattamente limitati da superfici curve.

Nota di LUIGI TENCA (a Firenze)

Santo. *Si mostra come l'estensione della definizione della spirale di* PAPPO *porti a considerare porzioni di sfera, limitate da superfici curve, il cui volume sia esprimibile esattamente, cioè con un'espressione intera semplice del solo raggio senza la presenza di irrazionali.*

1. Se prendiamo in una semisfera unitaria di centro O e di *polo* C un quadrante di cerchio che sia una metà della sezione della semisfera fatta con un piano passante per il suo asse e tale quadrante lo facciamo ruotare con moto uniforme attorno all'asse partendo dalla posizione iniziale OAC, essendo A un punto della circonferenza base della semisfera, mentre un punto mobile P parte nello stesso istante da C percorrendo con moto uniforme l'arco di circonferenza massima che appartiene al quadrante mobile, e la prima velocità angolare è quadrupla della seconda, si ha che, quando il quadrante ha compiuto un giro, il punto P ha percorso sulla superficie semisferica una curva che si chiama *spirale di* PAPPO [v. Fig. 1]. Questa elica si chiamò spirale per la sua

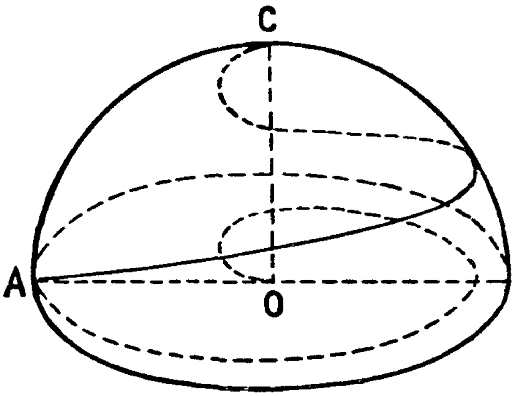

Fig. 1.

analogia, sulla superficie sferica, con la *spirale di* ARCHIMEDE nel piano [1].

[1] Vedi ad esempio: FEDERICI COMANDINO, *urbinatis Mathematici celeberrimi exatissima Commentaria, in libros octo mathematicorum collectionem* PAPPI ALEXANDRINI.... Pisauri, apud Hieronymum Concordiam 1602, pagg. 55-60, libr. IV, prop. XXX.

Se ω è la misura, compresa fra o e 2π, dell'angolo dei piani del settore OAC e del settore mobile e ρ la misura dell'arco CP di circolo massimo, compresa fra o e $\frac{\pi}{2}$, si ha che l'equazione di detta curva, in coordinate polari sferiche, è $\omega = 4\rho$; come senso positivo per le ω prendiamo quello secondo cui avviene la rotazione.

In generale se consideriamo l'equazione $\omega = m\rho$ al variare di m positivo otteniamo quante si vogliono spirali: se $m < 4$ le diremo *accorciate*, se $m > 4$ le diremo *allungate* ([2]).

Si badi che effettivamente si considerano in questo lavoro soltanto *archi* delle curve di equazione $\omega = m\rho$ e precisamente quelli che vanno dal polo all'equatore. Per avere l'intera curva sulla *superficie sferica* si dovrebbe prendere, invece del quadrante fisso OAC, il cerchio massimo al quale appartiene, invece del quadrante mobile il cerchio massimo al quale appartiene, con la condizione che il punto mobile P possa percorrere e ripercorrere la circonferenza di detto cerchio.

La proiezione ortogonale della spirale sul piano di base della semisfera è un arco di curva di equazione, in coordinate polari ordinarie del piano, $\rho_1 = \operatorname{sen} \frac{1}{m} \omega$, prendendo O come *polo di riferimento, OA* come asse polare, indicando con ρ_1 il modulo, con ω l'argomento, dove ω è ancora quello prima considerato, con lo stesso senso positivo.

2. Cominciamo con un cenno sulle porzioni della superficie sferica la cui area sia esprimibile *esattamente* in forma intera semplice col solo raggio, cioè senza la presenza di irrazionali.

La spirale ordinaria di PAPPO coll'arco di circolo massimo che ne unisce gli estremi ([3]), divide la superficie semisferica in due parti, l'inferiore ha l'area eguale a quattro volte il quadrato del raggio, l'altra a $(2\pi - 4)$ del quadrato del raggio come avremo occasione di vedere ([4]).

Se consideriamo come sopra altre spirali, ad esempio quelle di equazione $\rho = m\omega$ per m multiplo di 4, e descriviamo o no sulla super-

([2]) Per estensione della definizione della *spirale di* PAPPO, vedi:

a] GUIDO GRANDI, *Flores geometrici ex Rodonearum et Cloeliarum curvarum....* Florentiae, apud G. Tartinium et S. Franchium, 1728.

b] GINO LORIA, *Storia delle Matematiche.* Ed. U. Hoepli, Milano, 1950, pag. 75.

([3]) v. GINO LORIA, *Le scienze esatte nell'antica Grecia.* Ed. U. Hoepli, Milano, 1914, pagg. 673-74.

([4]) Cfr. ([3]).

ficie semisferica i circoli minori che si ottengono segando detta superficie con piani paralleli alla base e distanti da essa $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \frac{n-1}{n}$, n intero maggiore di uno abbiamo sempre porzioni quadrabili, per alcune delle quali *esattamente* con espressioni intere le più semplici del raggio, senza la presenza di irrazionali.

Dal VIVIANI (5) e dal GRANDI (2, 1) sono state trovate quante si vogliono porzioni della superficie sferica quadrabili *esattamente* nel modo detto.

Se proiettiamo sul piano di base della semisfera le curve sopra considerate, detta base risulta divisa col raggio che unisce gli estremi degli archi proiezioni delle spirali, in porzioni pure quadrabili, alcune *esattamente* nel modo detto.

Porzioni del cerchio quadrabili esattamente nel modo detto, limitate da altre linee, se ne possono trovare quante se ne vogliono.

3. Fermiamoci a studiare porzioni della sfera, limitate da superfici curve, ciascuna formata in parte da superfici cilindriche e in parte da porzioni della superficie della sfera stessa.

Consideriamo, in generale, la spirale accorciata (come caso limite la spirale di PAPPO) di equazione $\omega = m\rho$ (con $m \leq 4$).

Se indichiamo con s l'area della porzione S della supeficie sferica limitata dal quadrante CA di circonferenza massima, dall'arco CB di spirale, essendo B il punto in cui la spirale stessa incontra la circonferenza base della semisfera e dall'arco AB della circonferenza base si ha:

$$s = \int_0^{\frac{m\pi}{2}} d\omega \int_\rho^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \rho d\rho = \int_0^{\frac{m\pi}{2}} \cos \rho d\omega =$$

$$= \int_0^{\frac{m\pi}{2}} \cos \frac{\omega}{m} d\omega = m \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = m$$

Indicando con v il volume che si ottiene cubando detta superficie, rispetto alla base della semisfera, si ha, chiamando $\underline{B}$ la

(5) VINCENZO VIVIANI, *Formazione e misura di tutti i cieli...* Tip. P. Martini, Firenze, 1692.

proiezione ortogonale di S su detta base:

$$v = \iint_B \sqrt{1-\rho_1^2}\rho_1 d\rho_1 d\omega = -\frac{1}{3}\int_0^{\frac{m\pi}{2}} d\omega[(1-\rho_1^2)^{\frac{3}{2}}]^1_{\text{sen}\rho} =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{m\pi}{2}} \cos^3\rho d\omega = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{m\pi}{2}} \cos^3\frac{\omega}{m} d\omega$$

e posto $\omega = m\omega'$

$$v = \frac{m}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \omega'^3 d\omega' = \frac{m}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3\omega' + 3\cos\omega')d\omega' =$$

$$= \frac{m}{12}\left[\text{sen}\frac{3\pi}{2} + 3\,\text{sen}\frac{\pi}{2}\right] = \frac{2m}{9}$$

Ne viene quindi (per $m < 2$) che se colla porzione considerata della semisfera si considera la sua simmetrica ortogonalmente rispetto al piano del quadrante COA e del solido complessivo ottenuto si considera il suo simmetrico ortogonalmente rispetto alla base della semisfera, si ha nel complesso *come uno spicchio sferico* il cui volume è eguale a $\frac{8m}{9}$ e il suo *fuso* ha l'area eguale a $4m$; quindi per m razionale abbiamo quante si vogliono porzioni della sfera limitate da parte della sua superficie e da parte di due superfici cilindriche, cubabili *esattamente* nel modo indicato. Di tali *spicchi* se ne possono considerare di tipo vario.

4. Consideriamo i vari casi:

a) Il caso più interessante è quello in cui l'equazione è $\omega = \rho$. L'arco proiezione della spirale nel piano di base della semisfera è, come facilmente si vede, una semicirconferenza il cui raggio è eguale a $\frac{1}{2}$, avente un estremo nel centro e l'altro estremo sulla circonferenza di detta base. La proiezione della spirale sul piano COB è invece, come pure facilmente si vede, un arco di parabola ordinaria di vertice B e di asse BO.

La spirale non è altro che uno dei quattro archi della *vela fiorentina* del VIVIANI [6], un arco di una *quartica gobba di prima specie* [v. Fig. 2].

[6] Cfr, [5].

Si ha:

$$s = 1 \quad \text{e} \quad v = \frac{2}{9}$$

E prendendo della porzione della semisfera di volume $\frac{2}{9}$ la sua simmetrica ortogonalmente rispetto al piano COB, poi del so-

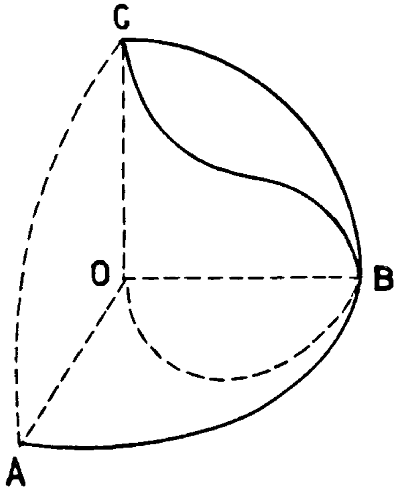

Fig. 2

lido complessivo ottenuto il suo simmetrico ortogonalmente rispetto alla base della semisfera, poi del solido complessivo ottenuto il suo simmetrico ortogonalmente rispetto al piano AOC, si ottiene dalla sfera un solido con due *fori* cilindrici circolari retti, eguali. tangenti, aventi la generatrice comune passante per il centro della sfera, ciascuno col raggio eguale alla metà del raggio della sfera. Il volume di questo solido è eguale ai $\frac{16}{9}$ del cubo del raggio della sfera; l'area della porzione di superficie sferica che in parte lo limita è eguale a 8 volte il quadrato del raggio.

b) Se $\omega = \frac{2}{3}\rho$, la proiezione di questa spirale sulla base della semisfera è un arco di curva compreso in un settore di 60° del cerchio base di cui un raggio OB unisce gli estremi e l'altro è tangente all'arco stesso.

Si ha:

$$s = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad v = \frac{4}{27}$$

E ripetendo i procedimenti prima seguiti, adattati opportunamente, si trova un solido risultante da una sfera con tre *fori* cilindrici paralleli aventi una generatrice comune passante per il centro della sfera, le cui sezioni normali col piano della base della semisfera sono eguali, tangenti fra loro e alla circonferenza base.

Il volume di detto solido è pure eguale a $\frac{16}{9}$ del cubo del raggio della sfera; l'area della porzione di superficie sferica che in parte la limita è pure eguale a 8 volte il quadrato del raggio.

c] Nel caso di $\omega = \frac{1}{2}\rho$, si ottiene una sfera con quattro *fori*; nel caso di $\omega = \frac{2}{5}\rho$, si ottiene una sfera con cinque *fori*; ecc. In generale:

Nel caso di $\omega = \frac{1}{n}\rho$, con n intero positivo, si ottiene un solido costituito da una sfera con $2n$ *fori* e il volume è sempre eguale a $\frac{16}{9}$ del cubo del raggio, l'area della porzione di superficie sferica che in parte lo limita è sempre eguale a 8 volte il quadrato del raggio della sfera; nel caso di $\omega = \frac{2}{2n-1}\rho$ si ottiene un solido con $2n - 1$ *fori* (n intero positivo) e sempre lo stesso volume e la stessa area.

Si noti che si ha un solido con un solo *foro* anche nel caso della *spirale di* Pappo, e dai risultati trovati al n. 3, facendo $m = 4$, si vede che questo solido ha lo stesso volume e la stessa area della porzione di superficie sferica che in parte lo limita, dei precedenti. In questo caso la porzione della base della semisfera limitata dal *foro* è data dalla proiezione della *spirale* sulla base stessa e dal raggio che unisce gli estremi di questa proiezione.

5. Si osservi che in ognuno dei solidi considerati, salvo per la spirale di Pappo, la curva completa che rimane in ogni caso determinata sulla superficie semisferica è una *clelia della seconda descrizione* e ciascuna curva completa che in ogni caso rimane determinata nel cerchio base è una *rodonea* come ce la presenta il Grandi. Egli di entrambe queste curve diede molte ed eleganti proprietà in modo semplice nella sua opera citata ([7]), delle quali alcune sono qui ricordate. Ad esempio la porzione del cerchio della base della semisfera tolte le parti staccate dai fori, cioè una rodonea, è sempre equivalente alla metà del cerchio stesso, e ciò anche per la spirale di Pappo.

L'area delle parti delle superfici dei due cilindri che limitano il solido nel caso di $\omega = \rho$ è pure eguale, come facilmente si vede, a 8 volte il quadrato del raggio quindi l'area della *superficie totale* di tale solido è eguale a 16 volte il quadrato del raggio della sfera.

([7]) Cfr. ([3]), *a*].