Bollettino
Unione Matematica Italiana

Alessandro Terracini

Relazioni tra invarianti proiettivi duali di coppie di elementi curvilinei.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.4, p. 368–374.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_4_368_0>

Relazioni tra invarianti proiettivi duali di coppie di elementi curvilinei.

Nota di ALESSANDRO TERRACINI (a Torino)

Sunto. - *Per una coppia di rami di un iperspazio proiettivo* S_{n+1} ($n \geq 2$), *con ordine e classe eguali ad uno, aventi la medesima origine e gli stessi spazi osculatori, con gli invarianti di* B. SEGRE *tutti eguali all'unità, si stabilisce l'esistenza di sostituzioni lineari fratte che conducono dagli invarianti proiettivi* γ_{ij} *recentemente introdotti dall'A. a quelli duali.*

1. In uno S_{n+1} proiettivo ($n \geq 2$), dove assumiamo coordinate proiettive non omogenee $x_0 = x, x_1, x_2, \ldots, x_n$, siano C, C' due rami lineari con la stessa origine O, aventi ivi in comune la retta tangente e tutti i successivi spazi osculatori, ciascuno di questi avendo coi due rami un contatto dello stesso ordine.

Si può disporre del sistema di riferimento in modo che i due rami siano rispettivamente rappresentati dalle

$$(1) \qquad x_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,i+k} x^{p_i+k} \quad , \quad (a_{ii} \neq 0)$$

$$(2) \qquad x_i = \sum_{k=0}^{\infty} a'_{i,i+k} x^{p_i+k} \quad , \quad (a'_{ii} \neq 0) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

dove le costanti p_i denotano numeri interi positivi soddisfacenti alle

$$1 < p_1 < p_2 < \ldots < p_n .$$

Coppie di rami in tali condizioni sono state ripetutamente considerate: in particolare B. SEGRE [1], generalizzando risultati di

[1] BENIAMINO SEGRE: *Sugli elementi curvilinei che hanno comuni le origini ed i relativi spazi osculatori.* Rend. Lincei, (6), vol XXII, 1935, pp. 392-399. Per altre citazioni cfr. la mia Nota l. c. [2].

CORRADO SEGRE e di altri, ha mostrato che le n quantità $J_i = a_{ii}/a'_{ii}$ $(1 \leq i \leq n)$ sono invarianti proiettivi.

In un lavoro recente [2] mi sono soffermato sul caso in cui tutti gli invarianti J_i di B. SEGRE sono eguali all'unità, (vale a dire sul caso in cui i due rami — se sono "ordinari", — posseggono in O le medesime curvature), rilevando l'esistenza di ulteriori invarianti proiettivi. Precisamente ho dimostrato che, se per un intero positivo $m \geq 0$ si ha

$$a_{i,i+k} = a'_{i,i+k}\,, \qquad (1 \leq i \leq n\,;\quad 0 \leq k \leq m) \tag{3}$$

mentre le differenze

$$a_{i,i+m+1} - a'_{i,i+m+1} \qquad (1 \leq i \leq n) \tag{4}$$

non sono tutte nulle, ciascuna delle espressioni

$$\gamma_{ij} = \frac{a_{i,i+m+1} - a'_{i,i+m+1}}{a_{ii}} : \frac{a_{j,j+m+1} - a'_{j,j+m+1}}{a_{jj}} \tag{5}$$
$$(1 \leq i \leq n\,;\ 1 \leq j \leq n\,;\ i \neq j)$$

(in quanto il divisore non sia nullo) è un invariante proiettivo. Per questi invarianti proiettivi, nel predetto lavoro, ho assegnato vari significati geometrici e proprietà.

Nella presente Nota intendo stabilire le relazioni tra gli invarianti proiettivi γ_{ij} e quelli duali γ^*_{ij}. Affinchè abbia senso parlare di questi ultimi senza uscire dal quadro delle ipotesi da me assunte nel mio lavoro citato, è necessario supporre che i due rami C, C', già supposti lineari, siano anche di prima classe, vale a dire che sia

$$p_{n-1} = p_n - 1.$$

In tale caso, come risulterà dal seguito, se per un iperpiano avente in coordinate correnti $X_0, X_1, \ldots, X_n$, l'equazione

$$\sum_{l=0}^{n} \eta_l X_l + \eta_{n+1} = 0$$

si assumono dapprima coordinate omogenee $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n, \eta_{n+1}$, e poi non omogenee $\xi_0 = \xi, \xi_1, \ldots, \xi_n$, con

$$\xi_i = \frac{\eta_{n-1-i}}{\eta_n} \quad (0 \leq i \leq n-1), \quad \xi_n = \frac{\eta_{n+1}}{\eta_n}, \tag{6}$$

[2] A. TERRACINI: *Sulle coppie di rami con la stessa origine e gli stessi spazi osculatori*, Rend. del Semin. Matem. Università e Polit. di Torino, vol. 12, 1953, pp. 265-281.

le rappresentazioni analitiche dei due rami in coordinate di iperpiano osculatore:

$$\text{(7)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \xi_i = \sum_{k=0}^{\infty} l_{i,\,i+k} \xi^{r_i+k} & (l_{ii} \neq 0) \\ \xi_i = \sum_{k=0}^{\infty} l'_{i,\,i+k} \xi^{r_i+k} & (l'_{ii} \neq 0) \end{array} \right\} \quad (1 \leq i \leq n)$$

con

$$\text{(8)} \qquad r_i = p_i - p_{n-1-i} \qquad (1 \leq i \leq n-1);\ r_n = p_n$$

$(p_0 = 1)$ presentano particolarità analoghe alle (3), vale a dire

$$\text{(9)} \qquad l_{i,\,i+k} = l'_{i,\,i+k}\,, \qquad (1 \leq i \leq n\,;\ 0 \leq k \leq m)$$

mentre anche qua le differenze

$$\text{(10)} \qquad l_{i,\,i+m+1} - l'_{i,\,i+m+1} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

non sono tutte nulle. Pertanto vi è luogo a considerare degli invarianti proiettivi γ_{ij}^* duali di quelli definiti dalle (5).

Orbene, le γ_{ij}^* possono esprimersi in funzione delle γ_{ij} mediante il seguente teorema, nel quale, per la coppia di rami considerati rispettivamente come luoghi e come inviluppi, ci riferiamo alle espressioni (non invarianti)

$$\text{(11)} \quad z_i = \frac{a_{i,\,i+m+1} - a'_{i,\,i+m+1}}{a_{ii}}\,; \quad z_i{}^* = \frac{l_{i,\,i+m+1} - l'_{i,\,i+m+1}}{l_{ii}} \quad (1 \leq i \leq n)$$

(cosicchè $\gamma_{ij} = z_i/z_j$; $\gamma_{ij}^* = z_i{}^*/z_j{}^*$, in quanto le espressioni scritte abbiano senso).

Teorema. - *Dati in* S_{n+1} $(n \geq 2)$ *due rami* C, C′, *lineari e di prima classe, aventi ivi in comune tutti i successivi spazi osculatori* ω_α $(1 \leq \alpha \leq n)$, *con gli stessi ordini di contatto con ciascuno di essi, rappresentati dalle* (1), (2), *se esiste un intero* $m \geq 0$ *tale che sussistano le* (3) *mentre le differenze* (4) *non sono tutte nulle* [3], *le espressioni* z_i, $z_i{}^*$ $(1 \leq i \leq n)$ *definite dalle* (11) *sono legate da una sostituzione lineare omogenea*

$$\rho z_i{}^* = \sum_{r=1}^{n} h_{ir} z_r\,. \qquad (1 \leq i \leq n)$$

dove i coefficienti h_{ir} *sono costanti numeriche* (*dipendenti da* n, m *e dalle* p_i).

[3] Per il significato geometrico dell'ipotesi relativa ad *m* cfr. l'*Osservazione* finale del n. 3 della mia Nota l. c. [2].

Per dimostrare il teorema enunciato, osserviamo anzitutto che le (1), (2) si possono scrivere rispettivamente nella forma

$$
\left.\begin{aligned}
&(1') \qquad x_i = x^{p_i} G_i(x) + \psi_i(x)\,, \\
&(2') \qquad x_i = x^{p_i} G_i(x) + \mathfrak{I}_i(x)\,.
\end{aligned}\right\} \quad 1 \leq i \leq n
$$

dove $G_i(x)$ è un polinomio in x, di grado m od eventualmente minore, mentre $\psi_i(x)$, $\mathfrak{I}_i(x)$ sono serie di potenze in x, i cui termini hanno grado $\geq p_i + m + 1$. Porremo

$$s = \sum_{i=1}^{n} p_i - \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad T = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}\,,$$

e indicheremo p. e. con $\Delta\,(p_1, p_2, \dots, p_n)$ il determinante di VANDERMONDE costruito a partire dagli interi $p_1, p_2, \dots, p_n$, e con $\Delta^{(\alpha)}$ il medesimo determinante quando manca la p_α.

Allora, riferendoci per ora p. e. al ramo C, si trovano per le coordinate omogenee $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n, \eta_{n+1}$ dell'iperpiano osculatore nel punto di argomento x le

$$(12) \qquad \eta_\alpha = (-1)^{\alpha+n}\left[\sum_{j=0}^{m+1} q_{\alpha,\alpha+j}\, x^{s-p_\alpha+1+j} + q_\alpha x^{s-p_\alpha+m+2}\right] + [s - p_\alpha + m + 3], \qquad (0 \leq \alpha \leq n\,;\ p_0 = 1)$$

$$(13) \qquad \eta_{n+1} = (-1)^n\left[\sum_{j=0}^{m+1} q_{n+1,\,n+1+j}\, x^{s+1+j} + q_{n+1} x^{s+m+2}\right] + [s + m + 3],$$

dove le q con due indici dipendono unicamente dai polinomi $G_i(x)$ e sono quindi le stesse per i due rami, ed in particolare ([4])

$$(14) \qquad \begin{cases} q_{\alpha\alpha} = \left|\prod_{i=1}^{n}{}^{(\alpha)} p_i(p_i - 1)\right| \Delta^{(\alpha)}(p_1, p_2, \dots, p_n)\, \dfrac{T}{a_{\alpha\alpha}} \qquad (1 \leq \alpha \leq n) \\[2ex] q_{00} = \left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right) \Delta(p_1, p_2, \dots, p_n)\, T \\[2ex] q_{n+1,\,n+2} = \left|\prod_{i=1}^{n} (p_i - 1)\right| \Delta(p_1, p_2, \dots, p_n)\, T, \end{cases}$$

laddove

$$q_\alpha = \frac{T}{a_{\alpha\alpha}} \sum_{r=1}^{n}{}^{(\alpha)} g_r^\alpha\, \frac{a_{r,\,r+m+1}}{a_{rr}} \qquad (1 \leq \alpha \leq n)$$

$$q_\beta = T \sum_{r=1}^{n} g_r^\beta\, \frac{a_{r,\,r+m+1}}{a_{rr}} \qquad (\beta = 0\,;\ \beta = n+1)$$

([4]) Col simbolo $\Pi^{(\alpha)}$ si vuole indicare che nel prodotto deve essere $i \neq \alpha$. Analogamente in seguito, anche ove si escludano più indici.

Ad una convenzione analoga ci atteniamo anche per il simbolo di sommatoria.

essendo le g_r^α, g_r^β $(1 \leq \alpha \leq n;\ \beta = 0,\ \beta = n+1;\ 1 \leq r \leq n;\ r \neq \alpha)$ costanti numeriche definite dalle

$$(15)\quad \begin{cases} g_r^\alpha = (p_r + m + 1)(p_r + m)\left[\prod_{i=1}^{n}{}^{(r,\alpha)} p_i(p_i - 1)\right]\Delta^{(\alpha)}(p_1, \dots, p_{r-1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad p_r + m + 1, p_{r+1}, \dots, p_n), \\ g_r{}^0 = (p_r + m + 1)\left[\prod_{i=1}^{n}{}^{(r)} p_i\right]\Delta(p_1, \dots, p_{r-1}, p_r + m + 1, p_{r+1}, \dots, p_n), \\ g_r{}^{n+1} = (p_r + m)\left[\prod_{i=1}^{n}{}^{(r)} (p_i - 1)\right]\Delta(p_1, \dots, p_{r-1}, p_r + m + 1, p_{r+1}, \dots, p_n). \end{cases}$$

Se ora per il medesimo iperpiano osculatore si calcolano le coordinate non omogenee $\xi_0 = \xi$, $\xi_1, \dots, \xi_n$ definite dalle (6), queste risultano espresse da serie di potenze in x, che si ottengono facilmente dalle (12), (13). In particolare, posto

$$G = q_{nn}/q_{n-1,\,n-1}$$

si ha la

$$\xi = -\frac{1}{G}x + \sum_{j=2}^{m+2} b_j x^j - \frac{1}{q_{nn}}\left(q_{n-1} - \frac{q_n}{G}\right)x^{m+2} + [m+3],$$

che si inverte nella

$$(16)\quad x = -G\xi + \sum_{j=2}^{m+2} c_j \xi^j + (-1)^{m+1}\frac{G^{m+1}}{q_{n-1,\,n-1}}(Gq_{n-1} - q_n)\xi^{m+2} + [m+3],$$

dove le costanti b_j, c_j dipendono unicamente dai polinomi $G_i(x)$ e per conseguenza sono ordinatamente le stesse per i due rami C, C'.

La (16) permette di trasformare gli sviluppi delle $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ in serie di potenze di x a cui si è testè accennato in sviluppi in serie di potenze di ξ. Ricordando le posizioni (8) si giunge così p. e. per il ramo C considerato come inviluppo dei suoi iperpiani osculatori alla rappresentazione data dalla prima della (7), dove,

$$(17)\qquad l_{ii} = (-1)^{i+1+r_i}\frac{q_{n-1-i,\,n-1-i}}{q_{nn}}G^{r_i} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

(intendendosi, e così in seguito, che l'indice -1 vada sostituito con $n+1$), ed i coefficienti $l_{i,\,i+k}$ $(1 \leq i \leq n;\ 1 \leq k \leq m)$, al pari di quelli testè specificati, dipendono ancora soltanto dai polinomi $G_i(x)$ e perciò sono gli stessi per i due rami, mentre — indicando con $L_{i,\,i+m+1}$ un'espressione in queste stesse condizioni — si ha

$$(18)\qquad l_{i,\,i+m+1} = L_{i,\,i+m+1} + (-1)^i G^{1+r_i+m}\left\{-\frac{q_{n-1-i}}{q_{nn}} + \right.$$
$$\left. + \frac{q_{n-1-i,\,n-1-i}}{q_{nn}}\left[\frac{r_i q_{n-1}}{q_{n-1,\,n-1}} - \frac{(r_i - 1)q_n}{q_{nn}}\right]\right\}. \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Immaginando scritte le (18) anche per il ramo C' e formandone ordinatamente le differenze con le stesse (18), e dividendo infine a membro a membro il risultato per (17), si ottengono per le z_i^* $(1 \leq i \leq n)$ delle espressioni che, utilizzando formole precedentemente scritte, conducono al seguente risultato, dove ricorriamo alle posizioni

$$(19) \quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} e_\beta &= p_n(p_n - 1) \prod_{i=1}^{n-1}{}^{(\beta)} (p_n - p_i), \\ k_\beta &= (-1)^{n+1-\beta} p_\beta(p_\beta - 1) \prod_{i=1}^{n-1}{}^{(\beta)} (p_\beta - p_i), \end{aligned}\right\} \quad 1 \leq \beta \leq n-1 \\ A = \dfrac{1}{p_n} \prod_{i=1}^{n-1} \dfrac{p_i - 1}{p_n - p_i}\,; \quad B = \dfrac{1}{p_n - 1} \prod_{i=1}^{n-1} \dfrac{p_i}{p_n - p_i}, \end{cases}$$

ed indichiamo con ρ un fattore di proporzionalità

$$(20) \quad \rho z_i^* = \frac{r_i}{e_{n-1}} \sum_{r=1}^{n}{}^{(n-1)} g_r^{\,n-1} z_r - \frac{\lambda_i}{k_{n-1}} \sum_{r=1}^{n}{}^{(n-1-i)} g_r^{\,n-1-i} z_r - \frac{r_i - 1}{k_{n-1}} \sum_{r=1}^{n-1} g_r^{\,n} z_r \qquad (1 \leq i \leq n)$$

dove

$$(21) \quad \begin{cases} \lambda_i = \dfrac{k_{n-1-i}}{e_{n-1-i}} \ (1 \leq i \leq n-2); \quad \lambda_{n-1} = A, \ \lambda_n = B; \\ g_r^{\,-1} = g_r^{\,n+1} \qquad (i \leq r \leq n) \end{cases}$$

ed i simboli Σ^0, Σ^{-1} vanno intesi come Σ.

Le (20) dimostrano senz'altro il teorema enunciato.

Esse permettono anche in ogni singolo caso — ricorrendo alle (15), (19) — di esplicitare i coefficienti della sostituzione lineare omogenea in esame.

Per esempio, nello spazio ordinario, per due rami di primo ordine e di prima classe, di rango $p_1 - 1$, aventi in comune la retta tangente ed il piano osculatore nell'origine, con valori unitari per i due invarianti J_1, J_2 di B. SEGRE, supponendo che il contatto tra i due rami sia soltanto di ordine p_1, si trae dalla (20) che gli invarianti γ_{12}, γ_{12}^* sono legati dalla relazione (involutoria)

$$(22) \quad p_1(p_1+1)^2\gamma_{12}\gamma_{12}^* - (p_1 - 1)(p_1 + 1)^2(\gamma_{12} + \gamma_{12}^*) + (p_1 - 1)^2(p_1 + 2) = 0$$

(che per $p_1 = 2$ si riduce a quella considerata alla fine della mia Nota l. c. [7]).

2. Terminiamo esplicitando la sostituzione lineare omogenea (20), in S_{n+1}, per due rami « ordinari » — vale a dire

tali che ognuno degli spazi ω_α osculatori comuni in O $(1 \leq \alpha \leq n)$ abbia ivi col ramo incontro $(\alpha + 1)$ — punto, essendo $J_i = 1$ $(1 \leq i \leq n)$, $m = 0$. Sarà dunque $p_i = i + 1$ $(1 \leq i \leq n)$.

A riduzioni fatte si trova la sostituzione lineare omogenea (necessariamente involutoria)

$$(23) \qquad \rho z_i^* = -\frac{n-i}{i+2} z_{n-i-2} + \frac{(i+1)n}{2} z_{n-2} - i(n+1) z_{n-1} + \\ + \frac{i(i+1)(n+2)}{2(i+2)} z_n \qquad (1 \leq i \leq n)$$

(dove il primo termine del secondo membro si presenta soltanto per $i \leq n-3$).