Bollettino
Unione Matematica Italiana

Beniamino Segre

Sulla totalità delle varietà algebriche razionali di uno spazio complesso.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.4, p. 374–377.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_4_374_0>

Sulla totalità delle varietà algebriche razionali di uno spazio complesso.

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Roma)

Sunto. - *In un* S_n *complesso, i punti (complessi) delle diverse varietà algebriche razionali (nel senso precisato al n. 1) formano una totalità assai più rarefatta di quanto non ci si potrebbe attendere. Ed invero, l'insieme dei punti di* S_n *situati su qualche varietà razionale di dimensione* $\leq q$, *ove* q *denoti un qualunque intero fisso soddisfacente alle limitazioni* $0 \leq q \leq n-1$, *è tale che l'insieme complementare contiene per intero un'infinità di varietà algebriche reali di dimensione* $n-q-1$. *Risultati più precisi son forniti dal teorema e dai corollari del n.* 1 *e dal lemma del n.* 3; *questi — assieme alle relative dimostrazioni — potrebbero facilmente venir estesi a campi diversi dai campi (razionale, reale e complesso) a cui, per semplicità di esposizione, qui ci limitiamo.*

1. Diremo che una varietà V — immersa in uno spazio proiettivo complesso $S_n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — è *reale* o *razionale*, quando sia possibile rappresentare V mediante un sistema di equazioni algebriche aventi rispettivamente per coefficienti numeri reali o razionali. In particolare, un *punto reale* o *razionale* sarà dunque un punto di S_n le cui coordinate x (omogenee) abbiano mutui rapporti reali o razionali.

Ciò premesso, ci proponiamo di dimostrare il seguente

TEOREMA. - *Data in* S_n *una qualsiasi varietà algebrica pura razionale* Π, *di dimensione* $p \geq 0$, *si può assoggettare* Π *ad una trasformazione omografica, prossima quanto si voglia all'identità, in guisa da dedurne una varietà reale,* Ω, *la quale — nel campo* *complesso — risulti priva di punti a comune con* c i a s c u n a V_q *razionale di* S_n *di dimensione* $q < n - p$.

Questo implica — fra l'altro — il

COROLLARIO I. - *Esistono spazi* S_p *subordinati reali di* S_n, *di tutte le dimensioni* $p = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, *ognuno dei quali — nel campo complesso — non ha punti a comune con* n e s s u n a V_q *razionale di* S_n *di dimensione* $q < n - p$.

Negli enunciati precedenti, non è restrittivo limitarsi al caso in cui le V_q di cui ivi è detto siano *pure*, in quanto ogni varietà impura razionale è somma di varietà pure razionali (di dimensioni diverse). Da essi si trae inoltre subito il

COROLLARIO II. - *Tanto la varietà* Ω *del teorema, quanto ciascuno degli* S_p *considerati nel corollario I, segano* o g n i V_q *pura razionale di* S_n *— di dimensione* $q \geq n - p$ *— secondo una varietà pura avente* e s a t t a m e n t e *la dimensione* $p + q - n$.

2. È ben noto come — per ogni dato $n \geq 1$ — si possa determinare un'n-pla di numeri reali (trascendenti) $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ fra loro a l g e b r i c a m e n t e i n d i p e n d e n t i, non legati cioè da alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali. All'uopo basta procedere induttivamente rispetto ad n e, supposto di aver già fissata la $(n - 1)$-pla di numeri $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ indipendenti, assumere ξ_n uguale ad un numero reale distinto dalle radici x delle varie equazioni ottenute uguagliando a zero un polinomio nelle $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, x a coefficienti razionali; tali polinomi, e quindi pure le loro radici x, costituiscono un insieme avente soltanto la potenza del numerabile; poichè l'insieme dei numeri reali ha potenza maggiore di quella, tanto basta per assicurare l'esistenza di detti numeri ξ_n, in corrispondenza ai quali la n-pla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ viene così ad avere il requisito voluto.

Con tale scelta delle ξ, nessuna ipersuperficie razionale di S_n può contenere il punto $O(1, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$; e ciò prova il corollario I enunciato nel n. 1, nell'ipotesi che ivi si assuma $p = 0$, $q = n - 1$, $S_p = O$ e si supponga V_q pura. Il corollario stesso vale conseguentemente anche per $p = 0$, $q < n - 1$, poichè — qualora esistesse una V_q pura razionale contenente O — il cono proiettante una siffatta V_q da un generico S_{n-q-2} razionale di S_n sarebbe una V_{n-1} pura razionale di S_n passante per O, in contraddizione con quanto già assodato.

3. Per raggiungere appieno lo scopo propostoci nel n. 1, converrà far uso del seguente

LEMMA. - *Se* P *è un qualunque punto semplice reale di una* V_r

algebrica razionale ed irriducibile di S_n $(1 \leq r \leq n-1)$, *in ogni intorno di* P *su* V_r *esiste qualche punto reale,* O, *tale che ciascuna varietà algebrica razionale di* S_n *passante per* O *debba di conseguenza contenere l'intera* V_r.

Scelto in S_n un qualunque S_r^* razionale distinto dallo spazio S_r tangente in P a V_r, possiamo determinare un punto O_0 reale di S_r^* che non stia su S_r (e sia quindi distinto da P), tale inoltre che non esista nessuna sottovarietà razionale di S_r^* passante per O_0 (n. 2.) La retta O_0P è reale e non tocca V_r in P; possiamo dunque fissare in S_n un S_{n-r-1} reale appoggiato alla O_0P, sghembo con S_r^* e congiunto ad O_0 da un S_{n-r} (pure reale) incontrante V_r in P semplicemente.

In un intorno comunque piccolo di S_{n-r-1} entro S_n, esiste ovviamente qualche spazio S_{n-r-1}^* razionale. Un tale S_{n-r-1}^* è congiunto ad O_0 da un S_{n-r}^* reale prossimo a piacere ad S_{n-r}, il quale perciò intersecherà semplicemente V_r in un punto reale, O, appartenente all'intorno di P. Mostreremo che O soddisfa alle condizioni volute dal lemma, procedendo per assurdo.

Supponiamo anzitutto che vi sia una V_{n-1}^* razionale di S_n che passi per O, senza tuttavia contenere V_r. Allora tale V_{n-1}^* sega V_r secondo una V_{r-1} razionale passante per O; basta quindi proiettare V_{r-1} da S_{n-r-}^* su S_r^*. tenendo conto che — per costruzione — entrambi questi spazi sono razionali, per ottenere in S_r^* una V_{r-1}^* proiezione che è razionale e che passa per O_0. Ma ciò contraddice l'ipotesi fatta per la scelta di O_0.

Al caso già trattato si riconduce poi — come mostreremo — quello restante, in cui vi sia una varietà V_k^* razionale di S_n — di dimensione $k < n-1$ — che passi per O e non contenga V_r. A tal fine, preso un punto Q di V_r che non stia su V_k^*, basta considerare un S_{n-k-2}^* razionale di S_n che non abbia punti (complessi) a comune con il cono (di dimensione $k+1$) proiettante V_k^* da Q. Il cono proiettante V_k^* da S_{n-k-2}^* è allora una V_{n-1}^* razionale, la quale passa per O ma non per Q, sicchè non contiene V_r, in contrasto con il capoverso precedente.

Le contraddizioni a cui siamo così pervenuti, provano che il punto O soddisfa di fatto alle condizioni enunciate nel lemma.

4. Siamo ora in grado di dimostrare il teorema del n. 1. Riferiamoci dunque ad una qualunque varietà algebrica pura razionale Π, di dimensione p ed ordine ν. Detto Σ il sistema delle trasformate omografiche (complesse) di Π, osserviamo che — sulla varietà W rappresentativa (al modo di Bertini o di Chow e van der

WAERDEN) dell'insieme delle varietà algebriche pure di S_n d'ordine ν e dimensione p — il sistema Σ ammette per imagine una varietà algebrica V, irriducibile e razionale, avente l'imagine P di Π come punto semplice reale (anzi razionale).

Determinato nell'intorno di P su V un punto O che soddisfi alle condizioni del lemma (n. 3), e detta Ω la corrispondente varietà di Σ, mostreremo che Ω gode della proprietà enunciata nel teorema. Ragionando per assurdo, suppongasi invece che Ω non goda di quella proprietà, e cioè che in S_n vi sia una V_q^* razionale, di dimensione $q < n - p$, appoggiata ad Ω in qualche punto (complesso). La totalità delle varietà algebriche pure di S_n d'ordine ν e dimensione p appoggiate in qualche punto alla V_q^*, ha per imagine in W una varietà algebrica razionale contenente O. In virtù del lemma, questa passa di conseguenza per V, ossia ogni varietà di Σ — e cioè ogni trasformata omografica di Π — risulta appoggiata a V_q^* in qualche punto.

Ora ciò è assurdo, come si vede osservando che, preso in S_n un S_p non incontrante V_q^* (nel campo complesso), il che è certamente possibile in forza della limitazione $q < n - p$, *fra le trasformate omografiche di* Π *v'è lo spazio* S_p *contato* ν *volte*, il quale per ipotesi non si appoggia a V_q^*. Si perviene infatti a questo spazio multiplo con un processo di limite che non fa uscire da Σ, il quale consiste nell'applicare a Π un'omografia biassiale di assi il suddetto S_p ed un S_{n-p-1} genericamente fissato in S_n, e far poi tendere all'infinito la relativa caratteristica.

Il teorema del n. 1 segue quindi senz'altro dalla contraddizione dianzi ottenuta.