Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Muracchini

Sulle trasformazioni puntuali inviluppi di omografie.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.4, p. 390–398.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_4_390_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Sulle trasformazioni puntuali inviluppi di omografie.

Nota di Luigi Muracchini (a Bologna)

Sunto. - *Si determinano le trasformazioni puntuali fra due spazi proiettivi, che sono inviluppi di una famiglia di omografie.*

1. Una trasformazione puntuale T, fra due spazi proiettivi S_n, $\bar{S}_n$, si dirà inviluppo di una famiglia ∞^s, Φ $(1 \leq s \leq n)$, di omografie fra quei due spazi quando esista in S_n una famiglia ∞^s di varietà V_{n-s} (che riempono l'S_n) ed una analoga famiglia di varietà $\bar{V}_{n-s}$ in $\bar{S}_n$ tali che T muti ciascuna V_{n-s} in una $\bar{V}_{n-s}$ e subordini fra le due varietà una corrispondenza omografica la quale sia pure subordinata ad una omografia della famiglia Φ che risulti inoltre tangente (analiticamente [1]) a T in tutte le coppie di punti corrispondenti di V_{n-s}, $\bar{V}_{n-s}$,

E. Čech ha trattato [2] il caso $s=1$, n qualunque ed anche il caso $s=2$, $n=3$ per quanto non completamente. Recentemente, in una riunione di Seminario tenuta a Bologna [3], il Čech attirò

[1] Per il significato di contatto analitico fra una trasformazione e una omografia si veda E. Čech, *Géometrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces* 1, « Cas. pro Pest. Mat. Fys. », 74 (1950) 32-48.

[2] E. Čech, *Gèométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces* V, « Journal Tchèque de Math. », 2 (77) 1952, 167-189

[3] Il 27 settembre u. s., cioè il giorno successivo a quello della chiusura del Convegno internazionale di geometria differenziale, ha avuto luogo nell'Istituto di Geometria dell'Università di Bologna un Seminario su problemi integrali della teoria delle trasformazioni puntuali a cui presero parte il prof. Čech, il prof. Villa e qualche altro.

l'attenzione sul problema di determinare le trasformazioni T del tipo suddetto in generale e in particolare di completare i suoi risultati per il caso $s=2$, $n=3$. Oggetto del presente lavoro è appunto quello di dare una costruzione di quelle trasformazioni T per qualsiasi valore di s e di n. Dimostreremo alcune proposizioni che permettono di ottenere la costruzione predetta. Per entrare nei particolari della costruzione occorrerebbe però uno studio ulteriore sulla struttura dei sistemi ∞^s di spazi lineari S_{n-s} di uno S_n. Tratteremo dettagliatamente alcuni esempi particolari, pervenendo fra l'altro al completamento dei risultati del Čech per $s=2$ $n=3$.

2. Incominciamo col dimostrare che:

I. *Sia* $K(t)$ *una famiglia* ∞^1 *di omografie fra due spazi* S_n, $\overline{S}_n$ *e* $P(t)$ *un punto di* S_n *tale che i suoi corrispondenti in* $\overline{S}_n$ *nell'omografia* $K(t)$ *e* $\frac{dK}{dt}$ *coincidono in un punto* $\overline{P}(t)$; *sia* Γ *la curva di* S_n *luogo di* $P(t)$ *e* $\overline{\Gamma}$ *la curva di* $\overline{S}_n$ *luogo di* $\overline{P}$. *Facendo corrispondere ad ogni punto* $P(t)$ *di* Γ *il punto* $\overline{P}(t)$ *di* $\overline{\Gamma}$ *si ottiene fra quelle due curve una corrispondenza tale che l'omografia* $K(t)$ *realizza un contatto analitico del primo ordine fra le due curve nella coppia* P, $\overline{P}$.

Si ha infatti, per ipotesi, adoperando un simbolismo facile ad intendersi,

$$K \cdot P = \overline{P} \tag{1}$$

$$dK \cdot P = \rho\overline{P} \tag{2}$$

ma dalla (1) si ha

$$d\overline{P} = dK \cdot P + K \cdot dP = K \cdot dP + \rho\overline{P}$$

ossia

$$K \cdot dP = d\overline{P} - \rho\overline{P}$$

e ciò dimostra l'asserto.

In modo analogo ed altrettanto semplice si dimostra che:

II. *Nelle condizioni dell'enunciato I, se* $P(t)$ *è mutato in uno stesso punto da* $K(t)$, $\frac{dK}{dt}, \dots, \frac{d^rK}{dt^r}$ *allora* $K(t)$ *realizza un contatto analitico d'ordine* r *fra* Γ *e* $\overline{\Gamma}$ *nella coppia* P, $\overline{P}$.

Sfruttando la proposizione I si dimostra subito la seguente:

III. *Sia* $K(u_1, \dots, u_s)$ *una famiglia* ∞^s *di omografie fra due spazi* S_n, $\overline{S}_n$ *e sia* $P(u_1, \dots, u_s)$ *un punto di* S_n *che sia trasformato in uno stesso punto* $\overline{P}(u_1, \dots, u_s)$ *dalle omografie* K, $\frac{\partial K}{\partial u_i}$ $(i=1, \dots, s)$.

Allora K *realizza un contatto analitico del primo ordine fra le varietà* V_s, $\overline{V}_s$ [4] *luoghi dei punti* P, $\overline{P}$, *nella coppia* P, $\overline{P}$.

Non mi soffermo sulla dimostrazione assai semplice, nè sulla estensione della proposizione II.

Si ha poi che:

IV. *Nelle condizioni dell'enunciato I, sia* $S_k(t)$ *uno spazio a* k *dimensioni luogo di punti trasformati ciascuno in uno stesso punto da* K(t) *e da* $\frac{dK}{dt}$ [5]. *Fra le varietà* V_{k+1}, $\overline{V}_{k+1}$. *luoghi degli spazi* $S_k(t)$, $\overline{S}_k(t) = K \cdot S_k(t)$ *intercede una corrispondenza* Σ *tale che l'omografia* K(t) *realizza un contatto analitico del primo ordine fra le due varietà in tutte le coppie di punti corrispondenti in* Σ *appartenenti alla coppia di spazi* S_k, $\overline{S}_k$. *(diremo in breve che* K(t) *è tangente alla corrispondenza* Σ *fra* V_{k+1}, $\overline{V}_{k+1}$ *lungo gli spazi* S_k, $\overline{S}_k$).

Per dimostrarlo osserviamo intanto che nella corrispondenza Σ fra V_{k+1}, $\overline{V}_{k+1}$ ad $S_k(t)$ corrisponde $\overline{S}_k(t)$ e fra quei due spazi è subordinata da Σ una omografia subordinata a $K(t)$. Siano $P(t)$, $\overline{P}(t)$ due punti omologhi in Σ di $S_k(t)$, $\overline{S}_k(t)$, sicchè $\overline{P} = K(t) \cdot P$; siano Γ, $\overline{\Gamma}$ le curve luogo di $P(t)$, $\overline{P}(t)$ le quali manifestamente sono due curve di V_{k+1}, $\overline{V}_{k+1}$ omologhe in Σ. Per la proposizione I, $K(t)$ realizza un contatto analitico del primo ordine fra Γ, $\overline{\Gamma}$ nella coppia P, $\overline{P}$. D'altra parte $K(t)$ manifestamente realizza il contatto analitico del primo ordine fra S_k, $\overline{S}_k$ nella coppia P, $\overline{P}$. Tanto basta (come si verifica con calcoli semplicissimi) perchè $K(t)$ realizzi il contatto analitico fra V_{k+1}, $\overline{V}_{k+1}$ nella coppia P, $\overline{P}$ e pertanto segue la proposizione enunciata.

La proposizione precedente si estende subito come segue [6]:

V. *Nelle condizioni dell'enunciato IV, ma nel caso di una famiglia* ∞^s *di omografie, siano* $S_k(u_1, \ldots, u_s)$, $\overline{S}_k(u_1, \ldots, u_s)$ *luoghi di punti che si corrispondono in tutte le omografie* $K(u_1, \ldots, u_s)$,

[4] Supponendo naturalmente che P, $\overline{P}$ descrivano effettivamente varietà ad s dimensioni.

[5] Un luogo irriducibile di punti trasformati allo stesso modo da due omografie è certamente uno spazio lineare perchè luogo di punti uniti in un'altra omografia.

[6] Converrà tener presente (ciò che si verifica facilmente) quanto segue: considerata una corrispondenza fra due varietà V_m, $\overline{V}_m$ e sia P, $\overline{P}$ una coppia regolare di punti corrispondenti; se K è una omografia che realizza il contatto analitico nella coppia P, $\overline{P}$ fra una V_k di V_m e la corrispondente $\overline{V}_k$ di $\overline{V}_m$ e fra una V_h di V_m e la corrispondente $\overline{V}_h$ di $\overline{V}_m$ con $h + k = m$ e V_h, V_k aventi solo P in comune ($\overline{V}_h$, $\overline{V}_k$ solo $\overline{P}$) allora K realizza il contatto analitico fra V_m e $\overline{V}_m$ nella coppia P, $\overline{P}$.

$\frac{\partial K}{\partial u_i}$ $(i = 1, \ldots, s)$. *Allora* $K(u_1, \ldots, u_s)$ *è tangente alla corrispondenza fra le varietà* V_{k+s}, $\overline{V}_{k+s}$ *lungo gli spazi* $S_k(u_1, \ldots, u_s)$, $\overline{S}_k(u_1, \ldots, u_s)$.

3. Ricordando la definizione di trasformazione T fra due spazi S_n, $\overline{S}_n$ inviluppo di una famiglia ∞^s di omografie (data in principio del n. 1), le proposizioni del n. 2 permettono di affermare che:

VI. *Si consideri una famiglia* ∞^s *di omografie fra due spazi* S_n, $\overline{S}_n$, $K(u_1, \ldots, u_s)$; *le omografie* $K(u_1, \ldots, u_s)$, $\frac{\partial K}{\partial u_i}$ $(i = 1, \ldots, s$ *mutino ogni punto* P *di uno* $S_{n-s}(u_1, \ldots, u_s)$ *di* S_n *in uno stesso punto* $\overline{P}$ *di uno* $\overline{S}_{n-s}(u_1, \ldots, u_s)$ *di* $\overline{S}_n$. *Allora, se gli* ∞^s S_{n-s} *riempiono l'*S_n *e gli* ∞^s $\overline{S}_{n-s}$ *riempiono l'*$\overline{S}_n$, *si ottiene fra quei due spazi una trasformazione* T *che è inviluppo delle omografie* $K(u_1, \ldots, u_s)$.

Passiamo ora a dimostrare la seguente proposizione, che inverte la I:

VII. *Siano* $\Gamma \equiv P(t)$, $\overline{\Gamma} \equiv \overline{P}(t)$ *due curve di* S_n, $\overline{S}_n$ *in corrispondenza arbitraria. Per ogni coppia* P, $\overline{P}$ *di punti omologhi esistono* ∞^N $[N = n^2]$ *omografie fra* S_n, $\overline{S}_n$, $K(t; \lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ *che realizzano un contatto analitico di* Γ, $\overline{\Gamma}$ *nella coppia* P, $\overline{P}$. *Si fissi ad arbitrio una omografia* K *per ogni coppia* P, $\overline{P}$ *si otterrà così una famiglia* ∞^1 *di omografie* $K[t; \lambda_1(t), \ldots, \lambda_N(t)]$. *Allora il punto* P *è mutato nel punto* $\overline{P}$ *sia dall'omografia* K *che dalla omografia* $\frac{dK}{dt}$.

Infatti si ha, per ogni $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, per ipotesi:

$$K \cdot P = \overline{P}$$
$$K \cdot dP = d\overline{P} + \rho(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)\overline{P}$$

segue che

$$\frac{dK}{dt} \cdot P = -\rho\overline{P}$$

comunque si fissino le λ_i funzioni di t; ciò dimostra l'asserto.

Le proposizioni III, IV, V si possono invertire altrettanto facilmente. Mi limiterò ad enunciare la inversa della IV, che verrà utilizzata in seguito:

VIII. *Siano* V_{k+1}, $\overline{V}_{k+1}$ *due varietà luogo di* ∞^1 *spazi* $S_k(t)$, $\overline{S}_k(t)$ *e fra di esse una corrispondenza* Σ *in cui si corrispondano* $S_k(t)$, $\overline{S}_k(t)$ *e fra questi due spazi subordini una omografia. Se esiste*

([7]) Se invece di una famiglia di S_{n-s} si avesse una famiglia di S_k con $k > n - s$ allora T sarebbe necessariamente una omografia, come si vede senza difficoltà.

una famiglia ∞^1 *di omografie tale che l'omografia* $K(t)$ *della famiglia subordina fra* $S_k(t)$, $\overline{S}_k(t)$ *la stessa omografia che* Σ *ed è tangente a* Σ *luogo* $S_k(t)$, $\overline{S}_k(t)$, *allora anche l'omografia* $\frac{dK}{dt}$ *subordina fra* $S_k(t)$, $\overline{S}_k(t)$ *la stessa omografia che* Σ.

In seguito utilizzeremo anche la seguente semplice osservazione:

IX. *Nelle condizioni dell'enunciato VIII, se esiste una famiglia* ∞^1 *di omografie* $K(t)$ *che operino come* Σ *su* $S_k(t)$, $\overline{S}_k(t)$ *ed anche (a meno di quantità infinitesime d'ordine superiore al primo) su* $S_k(t+dt)$, $\overline{S}_k(t+dt)$, *allora* $K(t)$ *è tangente a* Σ *lungo* $S_k(t)$, $\overline{S}_k(t)$.

Dimostriamo ora che:

X. *Sia* T *una trasformazione (non omografica) fra due spazi* S_n, $\overline{S}_n$ *la quale sia inviluppo di* ∞^s $(0 < s < n)$ *omografie* $K(u_1, \dots, u_s)$, *cioè sia tale che esista in* S_n *una famiglia* ∞^s *di varietà irriducibili* V_{n-s} *che riempiono* S_n *ed un'altra analoga di* $\overline{V}_{n-s}$ *in* $\overline{S}_n$ *e* T *muta ciascuna* V_{n-s} *in una* $\overline{V}_{n-s}$ *mentre una omografia della famiglia è tangente a* T *lungo ciascuna coppia di* V_{n-s}, $\overline{V}_{n-s}$ *corrispondenti. Allora le* V_{n-s}, $\overline{V}_{n-s}$ *sono necessariamente spazi lineari* S_{n-s}, $\overline{S}_{n-s}$ *e* T *si ottiene come dalla proposizione VI.*

Infatti per la VII e la inversa della III si ha che ogni punto di una V_{n-s} è mutato in uno stesso punto di $\overline{V}_{n-s}$ dalle omografie K, $\frac{\partial K}{\partial u_i}$ $(i = 1, \dots, s)$. Ma un punto di S_n che venga mutato in uno stesso punto di $\overline{S}_n$ da due omografie fra S_n, $\overline{S}_n$ è un punto unito di una certa omografia di S_n in sè. Pertanto V_{n-s} è luogo di punti uniti in certe omografie di S_n in sè; si conclude che V_{n-s}, essendo irriducibile, è uno spazio lineare S_{n-s} (8). La proposizione è così dimostrata.

4. Sia T una trasformazione fra due spazi proiettivi S_n, $\overline{S}_n$, inviluppo di ∞^s $(0 < s < n)$ omografie. Per quanto s'è detto esisterà in S_n (e così pure in $\overline{S}_n$) una famiglia ∞^s di S_{n-s} che riempiono S_n e una omografia della famiglia sarà tangente a T lungo ciascuna coppia di S_{n-s}, $\overline{S}_{n-s}$ corrispondenti in T. Vogliamo ora dimostrare alcune proposizioni che permetteranno di assegnare una costruzione per le trasformazioni T.

XI. *Si consideri una famiglia* ∞^1 *(qualsiasi) entro la* ∞^s *di* S_{n-s} *predetta in* S_n *e sia* $S_{n-s}(t)$; *sia poi* $\overline{S}_{n-s}(t)$ *la famiglia dei corrispondenti in* T *di* $\overline{S}_n$ *e* $K(t)$ *la relativa famiglia di omografie. Se* $P(t)$ *è un punto comune ad* $S_{n-s}(t)$ *ed all'* S_{n-s} *infinitamente*

(8) Se V_{n-s} fosse contenuta in uno S_k con $k > n - s$ allora T sarebbe omografica (Cfr la (7)).

vicino del primo ordine entro la famiglia considerata, allora $\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{t}) = \mathrm{K}(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{t})$ *è comune ad* $\overline{\mathrm{S}}_{\mathrm{n-s}}(\mathrm{t})$ *ed all'* $\overline{\mathrm{S}}_{\mathrm{n-s}}$ *infinitamente vicino.*

La proposizione discende subito dalla I, poichè se gli $S_{n-s}(t)$ sono tangenti al luogo di $P(t)$ gli $\overline{S}_{n-s}(t)$ dovranno essere tangenti al luogo di $\overline{P}(t)$.

Si ha poi che

XII. *Fra la curva* Γ *luogo di* $\mathrm{P}(\mathrm{t})$ *dell'enunciato XI e la curva* $\overline{\Gamma}$ *luogo di* $\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{t})$ *la omografia* $\mathrm{K}(\mathrm{t})$ *realizza un contatto analitico del secondo ordine nella coppia* P, $\overline{\mathrm{P}}$.

Ciò discende subito dalle seguenti relazioni

$$K \cdot P = \overline{P}, \qquad dK \cdot P = \rho \overline{P}$$
$$K \cdot dP = d\overline{P} - \dot{\rho} \overline{P}, \qquad dK \cdot dP = \rho d\overline{P} + \sigma \overline{P}$$

che esprimono le ipotesi, poichè se ne ricava che

$$K \cdot d^2 P = d^2 \overline{P} - 2\rho d\overline{P} + (\ldots) \overline{P}.$$

Le proposizioni XI e XII si estendono facilmente al caso in cui all'intorno del primo ordine si sostituisce l'intorno d'ordine r (qualsiasi); si ha cioè che:

XIII. *Se l'* $\mathrm{S}_{\mathrm{n-s}}(\mathrm{t})$, *dell'enunciato XI, è* r*–osculatore (cioè ha contatto d'ordine* r*) alla curva* Γ *descritta dal suo punto* $\mathrm{P}(\mathrm{t})$ *allora l'* $\overline{\mathrm{S}}_{\mathrm{n-s}}(\mathrm{t})$ *è* r*–osculatore alla curva* $\overline{\Gamma}$ *descritta dal punto* $\overline{\mathrm{P}}(\mathrm{t})$ *e* $\mathrm{K}(\mathrm{t})$ *realizza un contatto analitico d'ordine* $\mathrm{r}+1$ *fra* Γ *e* $\overline{\Gamma}$ *nella coppia* P, $\overline{\mathrm{P}}$.

È chiaro come la XIII si estenda al caso in cui un $S_{n-s}(t)$ e quelli infinitamente vicini fino all'ordine r abbiano in comune uno spazio lineare $S_k(t)$ anzichè un punto solo. In particolare rileviamo che: se gli $S_{n-s}(t)$ di una famiglia ∞^1 hanno un S_k fisso comune allora gli $\overline{S}_{n-s}(t)$ corrispondenti in T hanno un $\overline{S}_k$ fisso comune e tutte le omografie $K(t)$ subordinano fra S_k, $\overline{S}_k$ la stessa omografia.

Le proposizioni date permettono di costruire in ogni caso le trasformazioni T inviluppi di ∞^s omografie, tenuto conto della struttura delle ∞^s di S_{n-s} di uno S_n. Tratteremo però alcuni casi particolari prima di dare l'enunciato conclusivo.

5. Per $n = 3$. $s = 2$ (caso trattato, ma non esaurito, dal ČECH) si avrà in uno S_3 una ∞^2 (congruenza) di rette ed analogamente in uno $\overline{S}_3$. Risulta subito da quanto s'è detto nel n. 4 che le sviluppabili delle due congruenze si corrispondono in T ed inoltre che le loro focali si corrispondono e due di esse corrispondenti

devono essere dello stesso tipo (cioè entrambe superficie o curve o punti). Si hanno dunque da considerare i casi seguenti:

a) le congruenze hanno due superficie focali distinte;

b) hanno una sola superficie focale doppia;

c) una delle due focali si riduce ad una curva;

d) le focali sono due curve distinte;

e) vi è una sola curva focale (direttrice) doppia;

f) le congruenze sono due stelle di rette.

I casi *c*), *d*), non sono stati trattati dal Čech. Da quanto abbiamo dimostrato si ha intanto che detta $\varkappa$ la congruenza di S_3 e $\bar{\varkappa}$ quella di $\bar{S}_3$, dovranno le due congruenze essere dello stesso tipo proiettivo. Con ciò intendiamo che sia possibile porre fra $\varkappa$ e $\bar{\varkappa}$ una corrispondenza Σ (per ora arbitraria) tale che alle sviluppabili di $\varkappa$ corrispondono le sviluppabili di $\bar{\varkappa}$ e che sviluppabili corrispondenti siano dello stesso tipo cioè entrambe superficie sviluppabili propriamente dette oppure coni. Ciò premesso, supponiamo dapprima che su ogni retta r di $\varkappa$ (e quindi anche $\bar{r}$ di $\bar{\varkappa}$) vi siano due fuochi distinti; allora poniamo fra r ed $\bar{r}$ una proiettività in cui ai fuochi di r corrispondano i fuochi di $\bar{r}$ (che si corrispondono anche in Σ). Se invece su ogni retta r di $\varkappa$ (e quindi anche $\bar{r}$ di $\bar{\varkappa}$) i due fuochi coincidono in uno solo, poniamo fra r ed $\bar{r}$ una proiettività in cui al fuoco dell'una corrisponda quello dell'altra ([9]). Allora perchè le trasformazioni T così ottenute siano effettivamente inviluppi di ∞^2 omografie sarà necessario e sufficiente nel primo caso che esista per ogni coppia di rette $\bar{r}$, r una omografia che subordini fra r ed $\bar{r}$ e altre due coppie di rette corrispondenti in Σ infinitamente vicine ad r, $\bar{r}$ le relative proiettività poste. Analogamente nel secondo caso; si terrà presente in quest'ultimo caso la struttura della congruenza ([10]). Ora è facile vedere che nei casi *a*), *b*), *c*) le proiettività fra le rette delle congruenze che si debbono scegliere sono quelle subordinate alle omografie che realizzano il contatto analitico del primo ordine (in una coppia di fuochi corrispondenti) di due superficie focali ed il contatto analitico del secondo ordine delle curve inviluppate dalle rette della congruenza su quelle superficie.

([9]) Naturalmente le proiettività poste dovranno variare con continuità al variare delle r, $\bar{r}$.

([10]) Si veda, A. Terracini, *Variedades focales directrices de absorcion anormal en las variedades desarrollables*, « Revista Mat. y. Fis. Teor. », Tucumàn, 5 (1946), 335-361.

Inoltre la corrispondenza subordinata da Σ fra le due focali σ, $\bar{\sigma}$ considerate dovrà, nei casi *a*), *c*), essere tale che le equazioni di LAPLACE dei due doppi sistemi coniugati di σ, $\bar{\sigma}$ (che, per quanto s'è detto, si corrispondono in Σ) abbiano eguali gli invarianti relativi alle curve inviluppate su σ, $\bar{\sigma}$ dalle rette delle congruenze. Nel caso *b*) la corrispondenza fra σ, $\bar{\sigma}$ dovrà invece essere una semiapplicabilità proiettiva del ČECH. Nei casi *d*), *f*) le predette proiettività fra le rette delle congruenze non sono sottoposte a nessuna condizione oltre al corrispondersi dei fuochi. Nel caso *e*) le proiettività debbono essere subordinate ad omografie che realizzano il contatto analitico del primo ordine fra le direttrici doppie. Tutto ciò risulta con semplici calcoli, dalla proposizione VI.

6. Consideriamo una ∞^s di S_{n-s} in uno S_n $(0 < s < n)$. Chiamerò spazio singolare del primo ordine di uno S_{n-s} della famiglia, uno spazio intersezione di quello S_{n-s} con uno S_{n-s} infinitamente vicino a quello del primo ordine entro la famiglia. Spazio singolare d'ordine r uno spazio comune ad uno S_{n-s} e a tutti gli S_{n-s} infinitamente vicini a quello fino all'ordine r entro una famiglia ∞^1 contenuta nella famiglia ∞^s. È chiaro che uno spazio singolare d'ordine r è sempre contenuto in uno d'ordine $r-1$. Ciò posto diamo una proposizione che permette di costruire le trasformazioni T inviluppo di ∞^s omografie $(o < s < n)$ fra due S_n; come abbiamo detto alla fine del n. 4 occorrerebbe un esame dettagliato della struttura di una ∞^s di S_{n-s} in uno S_n per precisare geometricamente in modo completo la costruzione. Tuttavia la proposizione fornisce condizioni analitiche necessarie e sufficienti.

XIV. *In uno* $\mathrm{S_n}$ *sia data una* ∞^{s} *di* $\mathrm{S_{n-s}}$ *ed un'altra in uno* $\mathrm{\bar{S}_n}$. *Le due* ∞^{s} *siano dello stesso tipo proiettivo* [11] *(nel senso indicato nel n. 5) e fra di esse si ponga una corrispondenza* Σ *che muti ogni* ∞^{m} *con* $\mathrm{m} < \mathrm{s}$ *contenuta nella* ∞^{s} *di* $\mathrm{S_n}$ *in una contenuta nella* ∞^{s} *di* $\mathrm{\bar{S}_n}$ *che sia dello stesso tipo proiettivo che la prima. Fra due* $\mathrm{S_{s-n}}$ *corrispondenti in* Σ *si ponga una omografia che muti gli spazi singolari dei vari ordini del primo* $\mathrm{S_n}$ *in quelli del secondo, corrispondendosi gli spazi singolari come in* Σ, *con la condizione che le omografie poste fra due* $\mathrm{S_{n-s}}$ *e quelli infinitamente vicini del primo ordine (corrispondenti in* Σ*) siano contenute in*

[11] Si ottengono ad esempio coppie di ∞^s di S_{n-s}, di due spazi S_n, $\bar{S}_n$, dello stesso tipo proiettivo considerando una ∞^s di S_{n-s} con S_n tangente fisso lungo ogni S_{n-s} immerso in uno S_k con $k > n$ e proiettandola poi da due centri opportuni su due spazi S_n, $\bar{S}_n$ di S_k.

una stessa omografia fra S_n, $\overline{S}_n$. *Allora la trasformazione* T *che così si ottiene è inviluppo di* ∞^s *omografie fra* S_n, $\overline{S}_n$ (12).