BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIUSEPPE PALAMÀ

Sulla derivata erresima di classici polinomi rispetto ai parametri.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.4, p. 401–409.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_4_401_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1953.

Sulla derivata erresima di classici polinomi rispetto ai parametri.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce)

Sunto. - *È contenuto nella breve introduzione che segue.*

In due Lavori (1) abbiamo dato un contributo allo studio delle derivate del primo o di ordine superiore dei polinomi di LAGUERRE, $L_n^{(\alpha)}(x)$, rispetto ad α.

Due delle formule da noi stabilite relative alla $\dfrac{\partial L_n^{(\alpha)}(x)}{\partial\alpha}$, sono state poi ritrovate una da F. TRICOMI (2) e l'altra da L. TOSCANO (3).

Noi qui dimostriamo, con procedimento diverso da uno seguito altrove (4), una formula per la $\dfrac{\partial^r L_n^{(\alpha)}(x)}{\partial\alpha^r}$ e ne stabiliamo altre analoghe, per i polinomi ultrasferici ed ipergeometrici. Talune di queste formule si ottengono agevolmente a mezzo di un teorema applicabile ad una estesa classe di funzioni.

Si danno pure due formule ricorrenti per $\dfrac{\partial L_n^{(\alpha)}(x)}{\partial\alpha}$, una rispetto ad α e l'altra rispetto ad n.

1. Ridimostriamo la formula relativa alla $\dfrac{\partial^r L_n^{(\alpha)}(x)}{\partial\alpha^r}$.

Posto

$$\varphi_\alpha(x,\ z) = (1-z)^{-(\alpha+1)}e^{-\frac{xz}{1-z}}, \qquad |z| < 1,$$

(1) Cfr. G. PALAMÀ, *Sui polinomi di Legendre di Laguerre e di Hermite*, «Rend. Ist. Lombardo di Sc. e let.», Vol. LXX, (1937), fasc. II; IDEM, *Ancora sui polinomi di Laguerre*, «Boll. dell'Un. Mat. Ital.», Vol. XVII, (1938), pp. 90-93.

(2) F. G. TRICOMI, *Sulle derivate delle funzioni ipergeometriche confluenti rispetto ai parametri*, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», Cl. Sc. Fis. Mat. e Nat., 8, 12, (1952), pp. 227-233.

(3) L. TOSCANO, *Sulle derivate dei polinomi di Laguerre e del tipo ultrasferico rispetto al parametro*, «Boll. dell'Un. Mat. Ital.», 3, 8, (1953), fasc. II, pp. 193-195.

(4) Cfr. il primo dei Lavori c. in (1).

si ha

$$\frac{\partial^r \varphi_\alpha^{(x,z)}}{\partial \alpha^r} = (-1)^r \varphi_\alpha(x,z) \log^r (1-z), \qquad |z|<1; \tag{1}$$

ma

$$\log^r (1-z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+r} r!}{(m+r)!} h_{m+r,r} z^{m+r}, \qquad |z|<1, \tag{2}$$

ove $h_{m,r}$ sono i numeri di STIRLING di prima specie definiti dalle

$$h_{m,1} = (-1)^{m-1}(m-1)!, \qquad h_{m,m} = 1, \tag{3}$$
$$h_{m,r} = h_{m-1,r-1} - (m-1)h_{m-1,r}, \qquad m>r;$$

e

$$\varphi_\alpha(x,z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i L_i^{(\alpha)}(x). \qquad |z|<1;$$

pertanto dalla (1) si ha

$$\frac{\partial^r}{\partial \alpha^r}\left[\sum_{p=0}^{\infty} z^p L_p^{(\alpha)}(x)\right] = r!\, z^r \sum_{i=0}^{\infty} z^i L_i^{(\alpha)}(x) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m h_{m+r,r}}{(m+r)!} z^m, \qquad |z|<1,$$

che, moltiplicando alla CAUCHY le due serie del secondo membro, come è lecito, ed uguagliando poi i coefficienti di z^n dei due membri, dà

$$\frac{\partial^r L_n^{(\alpha)}(x)}{\partial \alpha^r} = r! \sum_{i=0}^{n-r} \frac{(-1)^{n-r-i} h_{n-i,r}}{(n-i)!} L_i^{(\alpha)}(x), \qquad r \leq n. \tag{4}$$

Ora quest'ultima, per la nota relazione

$$(-1)^{n-r} h_{n,r} = \frac{n!}{r!} s_{n,r},$$

si riduce appunto alla formula che si voleva stabilire [5].

Se nella (4) poniamo $r=1$ si ottiene un noto risultato.

2. Per ricavare la formula ricorrente rispetto ad α di $\frac{\partial L_n^{(\alpha)}(x)}{\partial \alpha}$ basta servirsi ad es. della [6]

$$\frac{\partial L_n^{(\alpha)}(x)}{\partial \alpha} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \cdot \frac{\partial^i L_n^{(\alpha)}(x)}{\partial x^i}. \tag{5}$$

[5] Cfr. l. c. in [4].

[6] Essa è sostanzialmente la formula da noi stabilita e ritrovata da L. TOSCANO cui si fa cenno nell'introduzione.

Difatti, la nota formula [7]

$$xL_n^{(\alpha+1)} - (x+\alpha)L_n^{(\alpha)}(x) + (\alpha+n)L_n^{(\alpha-1)}(x) = 0,$$

ricorrente rispetto ad α, la si derivi i volte rispetto ad x, la si divida per i e si sommino poi le formule che si ottengono quando si fa variare i da 1 ad n, si ha così un risultato cui, se si tien presente la (5), può darsi la forma

$$(6)\quad x\frac{\partial L_n^{(\alpha+1)}(x)}{\partial\alpha} - (x+\alpha)\frac{\partial L_n^{(\alpha)}(x)}{\partial\alpha} + (\alpha+n)\frac{\partial L_n^{(\alpha-1)}(x)}{\partial\alpha} + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i L_{n-i}^{(\alpha+i)}(x) = 0.$$

Ora, se nella formula [8]

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{m+j-1}{j}L_{n-j}^{(\alpha+j)}(x) = L_n^{(\alpha-m)}(x),\ m \text{ intero positivo arbitrario,}$$

si assume $m = 1$ si ha

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^j L_{n-j}^{(\alpha+j)}(x) = L_n^{(\alpha-1)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x),$$

cioè, per una notissima relazione

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^j L_{n-j}^{(\alpha+j)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha)}(x);$$

pertanto la (6) si riduce alla

$$x\frac{\partial L_n^{(\alpha+1)}(x)}{\partial\alpha} - (x+\alpha)\frac{\partial L_n^{(\alpha)}(x)}{\partial\alpha} + (\alpha+n)\frac{\partial L_n^{(\alpha-1)}(x)}{\partial\alpha} - L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0.$$

In modo analogo, partendo dalla

$$(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) - (\alpha+2n+1-x)L_n^{(\alpha)}(x) + (\alpha+n)L_{n-1}^{(\alpha)}(x) = 0,$$

si ricava la

$$(n+1)\frac{\partial L_{n+1}^{(\alpha)}(x)}{\partial\alpha} - (\alpha+2n+1-x)\frac{\partial L_n^{(\alpha)}(x)}{\partial\alpha} + (\alpha+n)\frac{\partial L_{n-1}^{(\alpha)}}{\partial\alpha} - L_n^{(\alpha-1)}(x) = 0.$$

Valori particolari di $\dfrac{\partial L_n^{(\alpha)}(x)}{\partial\alpha}$ sono i seguenti

$$\frac{\partial L_0^{(\alpha)}(x)}{\partial\alpha} = 0,\quad \frac{\partial L_1^{(\alpha)}(x)}{\partial\alpha} = 1,\quad \frac{\partial L_2^{(\alpha)}(x)}{\partial\alpha} = -x+\alpha+\frac{3}{2}.$$

[7] *Sui polinomi di Laguerre*, « Boll. dell'Un. Mat. It. », XVII, (1938), fasc. I, pp. 19-26.

[8] Cfr. l. c. in [7].

3. Per stabilire la formula per la derivata erresima del polinomio ultrasferico $P_n^{(\nu)}(x)$ rispetto a ν, si tenga presente che

$$(1-2ax+a^2)^{-\nu}=\sum_{n=0}^{\infty}a^nP_n^{(\nu)}(x). \tag{7}$$

Da questa difatti derivando r volte rispetto a ν segue

$$(-1)^r(1-2ax+a^2)^{-\nu}\log^r(1-2ax+a^2)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\frac{\partial^r}{\partial\nu^r}P_n^{(\nu)}(x),$$

cioè, se è

$$|2ax-a^2|<1,$$

e se si utilizzano le (2) e (7)

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^n\frac{\partial^rP_n^{(\nu)}(x)}{\partial\nu^r}=$$

$$=(-1)^r\sum_{m=0}^{\infty}a^mP_m^{(\nu)}(x)\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^{q+r}r\,!}{(q+r)\,!}h_{q+r,\,r}(2ax-a^2)^{q+r},$$

ossia

$$\sum_{n=0}^{\infty}a^n\frac{\partial^rP_n^{(\nu)}(x)}{\partial\nu^r}=$$

$$=(-1)^r\sum_{m=0}^{\infty}a^mP_m^{(\nu)}(x)\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{q+r}\frac{(-1)^{q+r+j}r\,!}{(q+r)\,!}\binom{q+r}{j}h_{q+r,\,r}a^{q+r+j}(2x)^{q+r-j}.$$

Ora, se moltiplichiamo le serie del secondo membro di quest'ultima alla Cauchy, come anche questa volta è possibile. ed uguagliamo poi i coefficienti di a^n, otteniamo

$$\frac{\partial^rP_n^{(\nu)}(x)}{\partial\nu^r}=(-1)^rr\,!\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=0}^{[p/2]}\frac{(-1)^ph_{p-k,\,r}}{k\,!\,(p-2k)\,!}(2x)^{p-2k}P_{n-p}^{(\nu)}(x),$$

che, essendo $h_{m,\,n}=0$, per $m<n$, può scriversi

$$\frac{\partial^rP_n^{(\nu)}(x)}{\partial\nu^r}=(-1)^rr\,!\sum_{p=r}^{n}\sum_{k=0}^{[p/2]}\frac{(-1)^ph_{p-k,\,r}}{k\,!\,(p-2k)\,!}(2x)^{p-2k}P_{n-p}^{(\nu)}(x), \tag{8}$$

cui si voleva pervenire.

Si noti che il limite superiore $[p/2]$ della seconda Σ della (8) va sostituito con $p-r$ quando è $[p/2]>p-r$, cosa questa che non si verifica mai quando è $r=1$.

Se nella (8) si fa $r=1$ e si tien presente la prima delle (3) si ha

$$\frac{\partial P_n^{(\nu)}(x)}{\partial\nu}=\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^k\binom{m-k}{k}}{m-k}(2x)^{m-2k}P_{n-m}^{(\nu)}(x). \tag{9}$$

Ma è [9]

$$V_m(x, -q) = m \cdot \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{q^k \binom{m-k}{k}}{m-k} x^{m-2k}, \tag{10}$$

ove $V_m(p, q)$ è una delle due funzioni numeriche del 2° ordine di Lucas che è soluzione della formula ricorrente [10]

$$V_m(p, q) - pV_{m-1}(p, q) + q = 0,$$

con i valori iniziali $V_0 = 2$, $V_1 = p$; quindi se nella (10) mutiamo x in $2x$ e facciamo $q = -1$, abbiamo

$$V_m(2x, 1) = m \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(-1)^k \binom{m-k}{k}}{m-k} (2x)^{m-2k}$$

che portato nella (9) ci dà

$$\frac{\partial P_n^{(\nu)}(x)}{\partial \nu} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} V_m(2x, 1) P_{n-m}^{(\nu)}(x). \tag{11}$$

D'altra parte si sa che [11]

$$V_m(2\cos\theta, 1) = 2\cos m\theta,$$

quindi la (11), ponendovi $x = \cos\theta$, può scriversi infine

$$\boxed{\frac{\partial P_n^{(\nu)}(\cos\theta)}{\partial \nu} = 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \cos m\theta P_{n-m}^{(\nu)}(\cos\theta).}$$

4. Dimostriamo ora il seguente teorema

Se è

$$\Phi(x, \alpha, \beta, \ldots, n) = f(x, \alpha, \beta, \ldots, n)\varphi_x^{(n)}(x, \alpha, \beta, \ldots, n), \tag{12}$$

ove Φ, f *e* φ *sono delle funzioni che, per* x, α, $\beta, \ldots$, *variabili in opportuni intervalli, siano derivabili quante volte occorrano rispetto a ciascuna delle* x, α, $\beta, \ldots$; $\varphi_x^{(n)}$ sta per $\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}$ (analoghi simboli sono

(9) E. Lucas, *Théorie des nombres*, t. I, Paris, (1891), p. 314.

(10) Cfr. l. c. in (9), pp. 308-331. Le due funzioni numeriche del secondo ordine sono state poi studiate estesamente da G. Candido, *Scritti matematici* (a cura di Enea Bortolotti ed E. Nannei), Firenze, (1948), pp. 467-577.

(11) Cfr. l. c. in (9), p. 319.

usati in seguito); *e se* ψ *è una funzione di* x, α, $\beta, \ldots$, n, *per cui si ha*

$$(13)\qquad \begin{cases} f'_\alpha = -\psi(x, \alpha, \beta, \ldots, n) f, \\ \varphi'_\alpha = \psi(x, \alpha, \beta, \ldots, n)\varphi, \end{cases}$$

allora è

$$(14)\qquad \Phi'_\alpha(x, \alpha, \beta, \ldots, n) = f \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \psi_x^{(i)} \varphi_x^{(n-i)}.$$

Difatti dalla (12) si ha per la (13)

$$\Phi'_\alpha = -\psi f \varphi_x^{(n)} + f \frac{\partial^n}{\partial x^n}(\varphi\psi),$$

da cui, applicando la formula di LEIBNIZ relativa alla derivata ennesima di un prodotto, segue subito la (14).

Ora, se dalla (12) può ricavarsi

$$\varphi_x^{(n-i)}(x, \alpha, \beta, \ldots, n),$$

allora nella (14) si può eliminare tale $\varphi_x^{(n-i)}$. Perchè ciò sia possibile occorre che α, $\beta, \ldots$ siano contenute in φ in delle espressioni in cui o manca la n, oppure, in caso contrario, che consentano, una volta mutato n in $n-i$, di variare α, $\beta, \ldots$ in modo che quelle espressioni non cambino; così se ad esempio esse sono dei tipi

$$(15)\qquad a_1\alpha + b_1 n + c_1, \quad a_2\beta + b_2 n + c_2, \ldots, \quad (a_i, b_i, c_i \text{ costanti}),$$

dopo aver cambiato n in $n-i$, basta mutarvi α, $\beta, \ldots$ rispettivamente in

$$(16)\qquad \alpha + \frac{b_1}{a_1} i, \qquad \beta + \frac{b_2}{a_2} i, \ldots,$$

affinchè le stesse (15) non varino.

In quest'ultima ipotesi dalla (12) si ha

$$\varphi_x^{(n-i)}(x, \alpha, \beta, \ldots, n) = f_1^{-1}\Phi_1,$$

ove con f_1 e Φ_1 si sono indicate le funzioni che si hanno rispettivamente dalle f e Φ quando in esse si mutano α, $\beta, \ldots$ ed n rispettivamente nelle (16) ed in $n-i$, e pertanto dalla (14) segue allora

$$(17)\qquad \Phi'_\alpha = f \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} f_1^{-1}\Phi_1 \psi_x^{(i)}.$$

Infine notiamo che le (13), dividendole membro a membro ed integrando danno

$$f = \theta\varphi^{-1},$$

in cui θ è una funzione dipendente soltanto da x, $\beta, \ldots, n$.

5. *Applicazioni.*

Per le funzioni che qui si considerano le dette condizioni di derivabilità sono verificate.

a) *Il caso dei polinomi di Laguerre.*

Si ha

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{n\,!}\, x^{-\alpha} e^{x} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\,(x^{\alpha+n} e^{-x}), \tag{18}$$

ed è quindi

$$\Phi = L_n^{(\alpha)}(x),\ f = \frac{1}{n\,!}\, x^{-\alpha} e^{x}, \quad \varphi = x^{\alpha+n} e^{-x},$$

e le (13) diventano

$$f'_\alpha = -f \log x, \quad \varphi'_\alpha = \varphi \log x.$$

Pertanto è

$$\psi = \log x, \quad \psi_x^{(i)} = (-1)^{i-1}(i-1)\,!\, x^{-i};$$

ma, poichè cambiando nella (18) n in $n-i$, α in $\alpha+i$, la φ non varia si ha

$$f_1 = \frac{1}{(n-i)\,!}\, x^{-\alpha-i} e^{x}, \quad \Phi_1 = L_{n-i}^{(\alpha+i)}(x).$$

Portando tali valori di $\psi_x^{(i)}$, f_1, Φ_1 nella (17) si ha la nota formula [12]

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} L_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i}\, L_{n-i}^{(\alpha+i)}(x).$$

b) *Il caso dei Polinomi ultrasferici.*

Dalla

$$\Phi(x,\ \alpha,\ n) = B_n(\alpha) P_n^{(\alpha/2)}(x) = \frac{(1-x^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(-2)^n n\,!} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n}(1-x^2)^{n+\frac{\alpha-1}{2}}, \tag{19}$$

ove

$$B_n(\alpha) = \frac{\left(\dfrac{\alpha+1}{2},\ n\right)}{(\alpha,\ n)},$$

si ha

$$f = \frac{(1-x^2)^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(-2)^n n\,!}, \quad \varphi = (1-x^2)^{n+\frac{\alpha-1}{2}},$$

[12] È appunto questa la formula di cui si parla nella nota (6).

che soddisfano alle (13) con

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \log (1 - x^2).$$

Inoltre, se nella (19) si cambia n in $n - i$, α in $\alpha + 2i$, la φ non muta perchè si ha

$$\Phi(x, \alpha + 2i, n - i) = B_{n-i}(\alpha + 2i) P_{n-i}^{\left(i+\frac{\alpha}{2}\right)}(x) =$$

$$= \frac{(1 - x^2)^{\frac{1-\alpha}{2} - i}}{(-2)^{n-i}(n - i)!} \cdot \frac{\partial^{n-i}}{\partial x^{n-i}} (1 - x^2)^{n + \frac{\alpha-1}{2}},$$

e quindi è

$$f_1 = \frac{(1 - x^2)^{\frac{1-\alpha}{2} - i}}{(-2)^{n-i}(n-i)!}, \quad \Phi_1 = B_{n-i}(\alpha + 2i) P_{n-i}^{\left(i+\frac{\alpha}{2}\right)}(x);$$

ma, essendo inoltre

$$\frac{d}{dx} \log (1 - x^2) = \frac{d}{dx} [\log (1 - x) + \log (1 + x)] = -(1 - x)^{-1} + (1 + x)^{-1},$$

e perciò

$$\frac{d^i}{dx^i} \log (1 - x^2) = \frac{(i - 1)!}{(1 - x^2)^i} [(-1)^{i-1}(1 - x)^i - (1 + x)^i],$$

dalla (17) si ha la nota formula ([13])

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} [B_n(\alpha) P_n^{\alpha/2}(x)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} A_i(x) B_{n-i}(\alpha + 2i) P_{n-i}^{\left(i+\frac{\alpha}{2}\right)}(x),$$

in cui

$$A_i(x) = (-1)^{i-1}\left(\frac{1 + x}{2}\right)^i - \left(\frac{1 - x}{2}\right)^i.$$

Il caso dei polinomi ipergeometrici.

Essi sono definiti dalla

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1 - x)^{-\alpha}(1 + x)^{-\beta} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [(1 - x)^{\alpha+n}(1 + x)^{\beta+n}].$$

Si ha ora

$$\Phi(x, \alpha, \beta, n) = P_n^{\alpha, \beta}(x), \quad f = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1 - x)^{-\alpha}(1 + x)^{-\beta},$$

$$\varphi = (1 - x)^{\alpha+n}(1 + x)^{\beta+n},$$

([13]) Cfr. l. c. in ([3]).

e le (13) sono soddisfatte con

$$\psi = \log (1 - x).$$

Si ha inoltre

$$f_1 = \frac{(-1)^{n-i}}{2^{n-i}(n-i)!}(1-x)^{-\alpha-i}(1+x)^{-\beta-i},\ \Phi_1 = P_{n-i}^{\alpha+i,\,\beta+i}(x),\ \psi_x^{(i)} = -\frac{(i-1)!}{(1-x)^i};$$

quindi dalla (17) segue

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\alpha} P_n^{\alpha,\,\beta}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{2^i i}(1+x)^i P_{n-i}^{\alpha+i,\,\beta+i}(x).}$$

Analogamente si ha poi

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\beta} P_n^{\alpha,\,\beta}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i i}(x-1)^i P_{n-i}^{\alpha+i,\,\beta+i}(x)}$$

e pertanto

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta} P_n^{\alpha,\,\beta}(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-i} \frac{(-1)^{i+1}}{2^{i+j} ij}(x+1)^i(x-1)^j P_{n-i-j}^{\alpha+i+j,\,\beta+i+j}(x).$$

d) *Il caso dei polinomi di Jacobi.*

Il teorema può anche applicarsi ai polinomi detti da taluni di Jacobi definiti dalla

$$(\gamma,\ n)F_n(\beta,\ \gamma,\ x) = x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta+n} \cdot \frac{\partial^n}{\partial x^n} x^{\gamma+n-1}(1-x)^{\beta-\gamma},$$

ove

$$F_n(\beta,\ \gamma,\ x) = F(-n,\ \beta,\ \gamma,\ x),$$

essendo F la funzione ipergeometrica di Gauss.