Bollettino
Unione Matematica Italiana

Lionella Neppi Modona

Su di una equazione differenziale non lineare del secondo ordine.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **8** (1953), n.4, p. 428–441.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1953_3_8_4_428_0>

Su di una equazione differenziale non lineare del secondo ordine.

Nota di LIONELLA NEPPI MODONA (a Firenze).

Sunto. - *Data l'equazione differenziale* $y'' + y' |y'| + y'q(y) + y - p^2y^3 = 0$, *supposto* $q(y)$ *funzione positiva, continua e derivabile di* y, *soddisfacente alla condizione* $q'(y) = o\left(|y|^{\frac{1}{2}}\right)$, *si determina una regione del piano* $[y, y']$ *tale che a tutti e soli i punti interni ad essa corrisponde, mediante le condizioni iniziali* $y(t_0) = \eta_0$, $y'(t_0) = \zeta_0$, *un integrale stabile dell'equazione per cui si ha:* $\lim\limits_{t \to \infty} [y^2(t) + y'^2(t)] = 0$.

1. Nel presente lavoro studio l'equazione differenziale non lineare del secondo ordine:

$$a) \qquad y'' + y' |y'| + y'q(y) + y - p^2y^3 = 0$$

con y funzione reale della variabile t, q funzione reale positiva di y, p costante positiva.

Uno studio approfondito su questa equazione, considerando q costante positiva, è stato pubblicato da J. CECCONI [1].

Io dimostro che se la funzione positiva $q(y)$ è continua e derivabile, e soddisfa alla condizione:

$$q'(y) = o\left(|y|^{\frac{1}{2}}\right)$$

restano valide le conclusioni ottenute da J. CECCONI con q costante positiva, cioè esiste una regione del piano $[y, y']$ tale che a tutti e soli i punti interni ad essa corrisponde, mediante le condizioni iniziali

$$b) \qquad y(t_0) = \eta_0, \qquad y'(t_0) = \zeta_0,$$

un integrale *(stabile)* dell'equazione differenziale $a)$ per cui si ha:

$$\lim_{t \to \infty} [y^2(t) + y'^2(t)] = 0.$$

2. In generale l'integrale dell'equazione differenziale $a)$, soddisfacente alle condizioni iniziali $b)$, non è definito per tutti i valori di t maggiori di t_0.

Ripetendo il ragionamento di J. CECCONI [2] nel caso di q costante positiva, che continua a valere nell'ipotesi che q sia funzione positiva e continua di y, si dimostra che se è:

$$|\eta_0| < \frac{1}{p}, \qquad \zeta_0 = 0;$$

l'integrale dell'equazione $a)$, determinato dalle condizioni $b)$, è definito per ogni $t \geq t_0$ ed è stabile essendo

$$\lim_{t \to \infty} [y^2(t) + y'^2(t)] = 0.$$

Questo risultato, insieme alle ipotesi fatte sulla funzione $q(y)$, permette di determinare la regione di *stabilità*, per l'integrale considerato, del piano immagine delle coppie η_0, ζ_0.

La definizione di questa regione, come vedremo, si basa sullo studio dell'equazione differenziale cartesiana delle linee caratteristiche

$$c) \qquad \frac{dz}{dy} = \frac{-z|z| - zq(y) - y + p^2y^3}{z}$$

(1) Cfr. J. CECCONI, *Su di una equazione differenziale non lineare del secondo ordine*, « Annali Sc. Norm. Sup. Pisa », (3), IV, 1950, pp. 245-262.

(2) Cfr. J. CECCONI, lav. cit. in (1), pp. 248-252.

associata all'equazione differenziale a), e su quello della curva di equazione

$$z\,|\,z\,|+zq(y)+y-p^2y^3=0$$

passante per i tre punti singolari dell'equazione differenziale c):

$$A=(-1/p,\ 0),\qquad O=(0,\ 0),\qquad A'=(1/p,\ 0).$$

3. Prendiamo in considerazione il punto singolare $O=(0,\ 0)$.

Essendo la funzione $q(y)$ per ipotesi positiva, posto $q(0)=q_0$ con q_0 costante positiva, si può scrivere:

$$q(y)=q_0+\chi(y)$$

e $\chi(y)$ è una funzione continua e derivabile di y, maggiore di $-q_0$, che si annulla nel punto O.

Quindi la funzione:

$$\varphi(z,\ y)=-z\,|\,z\,|-z\chi(y)+p^2y^3$$

si annulla nel punto O, è derivabile rispetto ad y e z, e per le sue derivate parziali si ha:

$$\varphi'_z=-2\,|\,z\,|-\chi(y),\qquad \varphi'_y=3p^2y^2-z\chi'_y(y)\,;$$

e inoltre, come facilmente si verifica, per qualunque numero positivo δ minore di 1, risulta:

$$\lim_{z\to 0,\ y\to 0}\frac{|\,\varphi'_z\,|+|\,\varphi_y'\,|}{(\,|\,z\,|+|\,y\,|\,)^\delta}=0.$$

Si può infatti scrivere:

$$(|\varphi'_z|+|\varphi'_y|)/(|z|+|y|)^\delta\leq(2|z|+|\chi(y)|+3p^2y^2+|z|\,|\chi'_y(y)|)/(|z|+|y|)^\delta=$$

$$=\left(\frac{|\,z\,|}{|z|+|y|}\right)^\delta(2|z|^{1-\delta}+|z|^{1-\delta}|\chi'_y(y)|)+\left(\frac{|\,y\,|}{|z|+|y|}\right)^\delta\left(|y|^{1-\delta}\left|\frac{\chi(y)}{y}\right|+3p^2|y|^{2-\delta}\right)<$$

$$<(2+|\,\chi'_y(y)\,|\,)\,|\,z\,|^{1-\delta}+3p^2\,|\,y\,|^{2-\delta}+\left|\frac{\chi(y)}{y}\right|\,|\,y\,|^{1-\delta}$$

essendo, poichè δ è positivo, $[|z|/(|z|+|y|)]^\delta<1$, $[|y|/(|z|+|y|)]^\delta<1$.

Si ha: $\chi(0)=0$; è quindi $\lim\limits_{y\to 0}\chi(y)/y=\chi'_y(0)$ e per ipotesi $\chi'_y(0)$ esiste finita.

Passando al limite per $y\to 0$, $z\to 0$, poichè δ è minore di uno, si ha: $\lim\limits_{\substack{z\to 0\\ y\to 0}}\left(2\,|\,z\,|^{1-\delta}+|\chi'_y(y)|\ |z|^{1-\delta}+3p^2|y|^{2-\delta}+\left|\frac{\chi(y)}{y}\right|\,|\,y\,|^{1-\delta}\right)=0,$

e quindi:

$$\lim_{z\to 0,\,y\to 0}(\,|\,\varphi'_z\,|+|\,\varphi'_y\,|\,)/(\,|\,z\,|+|\,y\,|\,)^\delta=0$$

essendo

$$0<(|\varphi'_z|+|\varphi'_y|)/(|z|+|y|)_\delta<(2+|\chi'_y(y)|)|z|^{1-\delta}+3p^2|y|^{2-\delta}+\left|\frac{\chi(y)}{y}\right||y|^{1-\delta}.$$

Sono quindi soddisfatte le ipotesi per cui valgono due noti teoremi di O. PERRON ([3]) e si può concludere che il punto O è un *nodo* per $q_0 \geq 2$, un *fuoco* per $q_0 < 2$.

Passiamo a considerare il punto $A = (-1/p,\ 0)$.

Se si eseguisce una traslazione degli assi, portando l'origine nel punto A, si ha:

$$\begin{cases} Z = z, \\ Y = y + 1/p, \end{cases};\quad \frac{dZ}{dY} = \frac{2Y - Zq_0 + p^2Y^3 - 3pY^2 - Z|Z| - Z\chi(Y - 1/p)}{Z};$$

posto $\chi(-1/p) = \bar{q}_0 > -q_0$, $\chi(Y-1/p) = \bar{q}_0 + \bar{\chi}(Y)$, la funzione $\bar{\chi}(y)$, nulla in A, risulta continua e derivabile essendolo $q(y)$.

La funzione $\bar{\varphi}(Z,\ Y) = p^2Y^3 - 3pY^2 - Z|Z| - Z\bar{\chi}(Y)$ è perciò continua e Lipschitziana in A, dove si annulla, e si ha pure:

$$\lim_{Z\to 0,\ Y\to 0} \bar{\varphi}(Z,\ Y)/(|Z| + |Y|) = 0;$$

È infatti:

$$\frac{\bar{\varphi}(Z,\ Y)}{|Z| + |Y|} = \frac{p^2Y^3 - 3pY^2 - Z|Z| - Z\bar{\chi}(Y)}{|Z| + |Y|} =$$

$$= (p^2Y^2 - 3pY)\frac{Y}{|Z| + |Y|} - (|Z| + \bar{\chi}(Y))\frac{Z}{|Z| + |Y|},$$

ed essendo

$$\lim_{Y\to 0}\bar{\chi}(Y) = 0, \qquad -1 < Z/(|Z| + |Y|) < 1,\quad -1 < Y/(|Z| + |Y|) < 1,$$

si ha:

$$\lim_{Z\to 0,\ Y\to 0} \bar{\varphi}(Z,\ Y)/(|Z| + |Y|) = 0.$$

Essendo soddisfatte le ipotesi per cui vale un teorema di O. PERRON ([4]), si può quindi concludere che il punto A è un *colle* e per esso passano due curve integrali dell'equazione differenziale c) e con direzioni distinte.

Con analogo ragionamento si conclude che anche il punto A' è *un colle e quindi per esso passano due curve integrali* dell'equazione differenziale cartesiana delle linee caratteristiche associata all'equazione in esame.

([3]) Cfr. O. PERRON, *Ueber die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singularen Punktes*, « Math. Zeitschrift », Band 15 (1922), pp. 121-146, Satz 1 - Band 16 (1923), p. 293, Satz 8.

([4]) Cfr. O. PERRON, lav. cit. in ([3]), Band 16, p. 292, Satz 7.

Per determinare il coefficiente angolare delle rette tangenti a tali linee caratteristiche nei punti singolari A e A' si ricorre allo stesso procedimento al limite usato nel caso di q costante da J. CECCONI [5], e si ha:

$$m_1 = \frac{-(q_0+\bar{q}_0)-\sqrt{(q_0+\bar{q}_0)^2+8}}{2}<0, \quad m_2=\frac{-(q_0+\bar{q}_0)+\sqrt{(q_0+\bar{q}_0)^2+8}}{2}>0,$$

$$n_1 = \frac{-(q_0+\bar{\bar{q}}_0)-\sqrt{(q_0+\bar{\bar{q}}_0)+8}}{2}<0, \quad n_2=\frac{-(q_0+\bar{\bar{q}}_0)+\sqrt{(q_0+\bar{\bar{q}}_0)+8}}{2}>0,$$

indicando con m_1 e m_2, n_1 e n_2, i coefficienti angolari delle rette tangenti alle linee caratteristiche in A ed A' rispettivamente, ed avendo posto $\chi(1/p)=\bar{\bar{q}}_0 > -q_0$.

4. Consideriamo la funzione $f(z, y) = -z|z| - zq(y) - y + p^2y^3$; sia y^0 un punto dell'asse delle y; si ha:

$$f(0, y^0)=0 \text{ per } y^0 = -1/p,\ y^0=0,\ y^0=1/p,$$
$$f(0, y^0)>0 \text{ per } -1/p < y^0 < 0, \text{ oppure } y^0 > 1/p,$$
$$f(0, y_0)<0 \text{ per } y^0 < -1/p \text{ oppure } 0 < y^0 < 1/p.$$

Poichè la funzione f è continua e ad ogni valore di y si associa uno ed un solo valore di z per cui sia $f(z, y)=0$, se ne deduce che la curva di equazione $f=0$ è determinata in tutto il piano (z, y) e presenta il caso semplice rispetto all'asse delle z, e che la funzione f è positiva nei punti del piano yz situati, rispetto alla curva di equazione $f=0$, dalla stessa banda della semiretta delle z negative, negativa nei punti situati dall'altra banda.

In O la curva di equazione $f(z, y)=0$, che indicheremo con la lettera Γ, ha andamento decrescente, in A ed A' crescente, essendo:

$$(dz/dy)_O = -1/q_0 < 0, \qquad (dz/dy)_A = 2/(q_0+\bar{q}_0) > 0,$$
$$(dz/dy)_{A'} = 2/(q_0+\bar{\bar{q}}_0) > 0,$$

e non taglia l'asse delle y in altri punti.

Esplicitata la funzione f in z, per le ipotesi fatte sulla funzione $q(y)$, si ha:

$$\lim_{y\to+\infty} z(y) = +\infty, \qquad \lim_{y\to-\infty} z(y) = -\infty, \qquad \lim_{y\to\pm\infty} dz/dy = +\infty,$$

come ora passiamo a dimostrare.

Posto $q(y) = q_0 + \chi(y)$, se è $q'(y) = o\left(|y|^{\frac{1}{2}}\right)$, si ha pure: $\chi_y'(y) = o\left(|y|^{\frac{1}{2}}\right)$; se scriviamo $\chi'_y(y) = L(y)\,|y|^{\frac{1}{2}}$, per le ipotesi fatte

(5) Cfr. J. CECCONI, lav. cit. in (1), p. 253.

$L(y)$ è una funzione continua e scelto un numero σ positivo arbitrario, esiste un $k > 0$ tale che sia $L(y) \leq \sigma$ per $y \geq k$.

Essendo $\chi'_y(y)$ una funzione continua, si ha:

$$\chi(y) - \chi(k) = \int_k^y \chi'_y(y) dy = \int_k^y L(y) \, | \, y \, |^{\frac{1}{2}} dy < \sigma \int_k^y y^{\frac{1}{2}} dy = \frac{2}{3} \sigma \left(y^{\frac{3}{2}} - k^{\frac{3}{2}} \right) < \frac{2}{3} \sigma y^{\frac{3}{2}},$$

e quindi, ricordando che è: $\chi(y) > - q_0$,

$$- q_0 < \chi(y) < \frac{2}{3} \sigma y^{\frac{3}{2}} + \chi(k)$$

da cui dividendo per $y^{\frac{3}{2}}$ e passando al limite per y tendente a più infinito:

$$\lim_{y \to +\infty} \chi(y) / y^{\frac{3}{2}} = 0.$$

È quindi: $\chi(y) = o\left(| \, y \, |^{\frac{3}{2}} \right)$.

Ciò premesso, dimostriamo che è $\lim\limits_{y \to +\infty} z(y) = + \infty$.

Per valori di y maggiori di $1/p$ la forma esplicita dell'equazione della curva Γ è la seguente:

$$z = \frac{- q_0 - \chi(y) + \sqrt{(q_0 + \chi(y))^2 + 4y(p^2 y^2 - 1)}}{2};$$

dividendo ambedue i membri dell'equazione per $y^{\frac{3}{2}}$ e passando al limite per y tendente a più infinito, si ha:

$$\lim_{y \to +\infty} z / y^{\frac{3}{2}} = p.$$

Risulta quindi che per $y \to + \infty$ la funzione $z(y)$ tende a più infinito di ordine $3/2$ rispetto ad y.

Passiamo a dimostrare che è $\lim\limits_{y \to +\infty} dz/dy = + \infty$.

Per valori di y maggiori di $1/p$ si ha;

$$| \, z \, | = z = \frac{- q_0 - \chi(y) + \sqrt{(q_0 + \chi(y))^2 + 4y(p^2 y^2 - 1)}}{2} > 0,$$

e quindi:

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{f_y(z, \, y)}{f_z(z, \, y)} = \frac{- 1 + 3p^2 y^2 - z \chi'_y(y)}{2z + q_0 + \chi(y)} = - \frac{1}{2z + q_0 + \chi(y)} +$$

$$+ \frac{3p^2 y^2}{\sqrt{(q_0 + \chi(y))^2 + 4y(p^2 y^2 - 1)}} - \frac{z \chi'_y(y)}{2z + q_0 + \chi(y)};$$

si può pure scrivere:

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{2z + q_0 + \chi(y)} + y^{\frac{1}{2}}(N(y) + M(y))$$

con

$$N(y) = \frac{3p^2}{\sqrt{\left(\frac{q_0}{y^{\frac{3}{2}}} + \frac{\chi(y)}{y^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + 4p^2 - \frac{4}{y^2}}}, \qquad M(y) = \frac{\chi'_y(y)/y^{\frac{1}{2}}}{2 + q_0/z + \chi(y)/y^{\frac{3}{2}} : z/y^{\frac{3}{2}}}.$$

Essendo $\chi(y) = o\left(|y|^{\frac{3}{2}}\right)$, $\chi'_y(y) = o\left(|y|^{\frac{1}{2}}\right)$, $\lim_{y \to +\infty} z = +\infty$, $\lim_{y \to +\infty} z/y^{\frac{3}{2}} = p$, si ha:

$$\lim_{y \to +\infty} N(y) = 3p/2 > 0, \qquad \lim_{y \to +\infty} M(y) = 0,$$

e

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{1}{2z + q_0 + \chi(y)} = 0,$$

potendosi scrivere:

$$\frac{1}{2z + q_0 + \chi(y)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{2 + q_0/z + \chi(y)/y^{\frac{3}{2}} : z/y^{\frac{3}{2}}}.$$

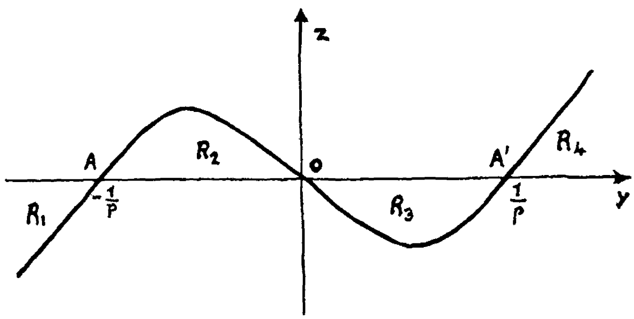
Risulta perciò

$$\lim_{y \to +\infty} dz/dy = +\infty,$$

e precisamente dz/dy tende a più infinito di ordine $1/2$ rispetto ad y.

Con metodo analogo si studiano gli altri due limiti.

L'andamento della curva Γ per q costante positiva è il seguente:



dove indichiamo con R_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ le quattro regioni delimitate dalla curva in studio e dall'asse delle y.

5. Anche nel caso generale in studio possiamo considerare, con J. CECCONI, queste quattro regioni R_i.

Poichè $dz/dy = f(z, y)/z$ rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente ad una curva integrale dell'equazione differenziale *c*), tenuto conto dei segni di $f(z, y)$ e di z, risulta che tale curva, linea caratteristica del sistema associato all'equazione differenziale *a*), ha andamento crescente nei punti interni alle regioni R_i, decrescente nei punti esterni a tali regioni, ed ha dei punti di massimo o minimo relativi nei punti in cui incontra la curva Γ di equazione $f(z, y) = 0$; inoltre si deduce che essa taglia ortogonalmente l'asse delle y se lo incontra in punti distinti dai punti singolari A, O, A'.

Consideriamo le linee caratteristiche passanti per i punti singolari A ed A', per le quali si ha:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \pm 1/p, \qquad \lim_{t \to \infty} z(t) = 0\,;$$

si dimostra che esse non tagliano l'asse delle y in punti interni al segmento AA' ed inoltre che le linee caratteristiche uscenti dal punto singolare A non passano per il punto singolare A'. e viceversa [6].

Indichiamo con Z la regione del piano yz delimitata dalle curve S ed S', chiamando S la linea caratteristica uscente dal punto singolare A di coefficiente angolare m_1, S' la linea caratteristica uscente dal punto singolare A' di coefficiente angolare n_1. Per quanto sopra, tali linee hanno sempre andamento decrescente, salvo un numero finito od infinito di tratti crescenti interni alla regione R_3 la S, alla regione R_4 la S'.

6. Passiamo a dimostrare che, preso un punto $P = (\eta_0, \zeta_0)$ qualsiasi della regione Z e fissato arbitrariamente un valore t_0 di t, per ogni valore di $t \geq t_0$ è definito l'integrale dell'equazione differenziale *a*), soddisfacente alle condizioni iniziali

$$b) \qquad y(t_0) = \eta_0, \qquad y'(t_0) = z(t_0) = \zeta_0,$$

ed inoltre che tale integrale è *stabile* e si ha:

$$\lim_{t \to \infty} [y^2(t) + y'^2(t)] = 0.$$

Ciò è vero, come si è già detto, per tutti i punti del segmento AA', estremi esclusi.

[6] Cfr. J. CECCONI, lav. cit. in [1], pp. 255-256.

Indichiamo con γ la linea caratteristica corrispondente al punto P considerato, e ricordiamo che:

1) Se è $\zeta_0 > 0$ la linea γ è definita in un intorno destro del punto P, essendo y funzione crescente di t; se è $\zeta_0 < 0$ invece è definita in un intorno sinistro risultando y funzione decrescente di t.

2) La curva γ ha andamento crescente negli eventuali punti interni alle parti delle due regioni R_2 e R_3 che appartengono alla regione Z, ed andamento decrescente in tutti gli altri punti, ma se incontra la curva Γ ha in questi punti di incontro punti di massimo o minimo relativi.

3) La curva γ non può incontrare le caratteristiche S ed S' fuori dei punti A o A', perchè *per un punto non singolare* del piano η_0, ζ_0 *passa una sola linea caratteristica.*

4) Le linee caratteristiche passanti per i colli A ed A', diverse dalle S e S', hanno in quei punti andamento crescente.

Sia P un punto di Z situato nel I° o nel III° quadrante; per quanto si è sopra ricordato risulta che la curva γ tende con andamento decrescente ad un punto M interno al segmento OA' se è $\eta_0 > 0$, al segmento AO se è $\eta_0 < 0$; poichè per un punto non singolare passa una sola linea caratteristica, la curva γ coincide con quella associata al punto M, cui corrisponde un integrale stabile e tale che sia

$$\lim_{t \to \infty} [y^2(t) + y'^2(t)] = 0$$

essendo M un punto del segmento AA'.

Sia P un punto di Z situato nel II° quadrante; nell'ipotesi che P sia esterno alla regione R_2 si presentano due casi:

i) la curva γ, decrescente in un intorno destro del punto P considerato, tende monotonamente, senza tagliare la curva Γ, ad un punto interno al segmento OA' od al punto O stesso; in questa seconda ipotesi (che si può verificare solo per $q_0 \geq 2$ risultando O un *nodo*), poichè O è un punto singolare, si ha evidentemente:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0, \qquad \lim_{t \to \infty} y'(t) = 0,$$

e quindi l'integrale è definito per $t \geq t_0$ e stabile; altrimenti si rientra nel caso precedente.

ii) la curva γ passa per un punto Q interno alla regione R_2; detta $\underline{y}$ l'ascissa di questo punto e $z_\gamma(\underline{y})$ la sua ordinata, ed indicata con $z_\Gamma(\underline{y})$ l'ordinata del punto di Γ avente la stessa ascissa $\underline{y}$, è ovviamente $z_\gamma(\underline{y}) < z_\Gamma(\underline{y})$. Data la continuità della curva Γ e della curva γ definita per $\underline{y} < y \leq 0$, poichè la curva Γ passa per il punto O, la curva γ crescente nei punti interni alla regione R_2

incontra la curva Γ in punto di ascissa $\bar{y}$ ed ordinata $z_\Gamma(\bar{y}) = z_\gamma(\bar{y}) > z_\gamma(\underline{y})$.

Il numero dei punti comuni ai due tratti considerati delle curve γ e Γ può essere finito od infinito; consideriamo l'estremo superiore ξ delle corrispondenti ascisse; se è $\xi = 0$, la curva γ tende in modo oscillante ad O (questo si può verificare solo per $q_0 \geq 2$ risultando O un *nodo*) e si ha:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0, \qquad \lim_{t \to \infty} y'(t) = 0.$$

Se è $\xi \neq 0$ deve essere $z_\gamma(\xi) = z_\Gamma(\xi)$, perchè se i valori delle due ordinate fossero diversi esisterebbe un intorno del punto ξ, $z_\gamma(\xi)$ nel quale non cadrebbero punti comuni alle due curve γ e Γ.

Per $\xi < y \leq 0$ si ha sempre $z_\Gamma(y) < z_\gamma(y)$; infatti se vi fosse un valore y di y tale che risultasse $z_\Gamma(y) > z_\gamma(y)$ con analogo ragionamento a quello svolto sul punto Q, si dedurrebbe che la curva γ taglia ulteriormente la curva Γ e ciò è assurdo poichè ξ è l'estremo superiore delle ascisse dei punti comuni ai due tratti considerati delle curve γ e Γ. Risulta che in un intorno destro del punto ξ, $z_\gamma(\xi)$ la curva γ ha andamento decrescente ed a partire da questo punto si rientra nelle ipotesi del caso *i*).

Se ne deduce che anche nelle ipotesi del presente caso *ii*), l'integrale è definito per ogni $t \geq t_0$ e stabile, e si ha:

$$\lim_{t \to \infty} [y^2(t) + y'^2(t)] = 0.$$

Se il punto P di Z è situato nel IV° quadrante, con analogo ragionamento si giunge alle stesse conclusioni.

Si può quindi concludere che *per ogni coppia di valori* η_0, ζ_0 *cui corrisponde un punto interno alla regione* Z *delimitata dalle caratteristiche* S *e* S′ *e per ogni* $t \geq t_0$ *(con* t_0 *arbitrario) è definita la soluzione dell'equazione differenziale a), soddisfacente alle condizioni iniziali b), e che tale integrale* y(t) *è stabile essendo:*

$$\lim_{t \to \infty} [y^2(t) + y'^2(t)] = 0.$$

Quindi la regione Z è di stabilità.

7. Soffermiamoci ora sul caso che il punto $P = (\eta_0, \zeta_0)$ non sia interno alla regione Z.

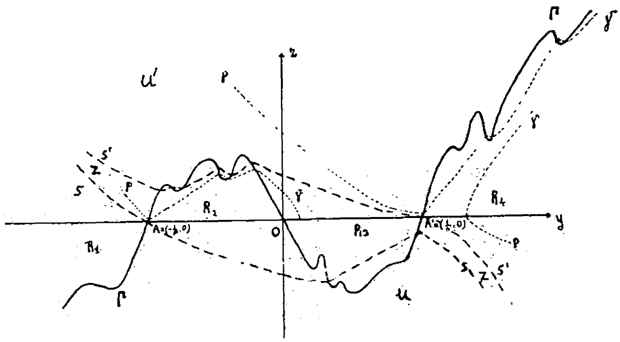
Se il punto P appartiene alla frontiera di Z (esclusi i punti A e A' cui corrispondono delle soluzioni costanti), esso si trova su una delle linee caratteristiche S o S'; poichè per un punto non singolare passa una sola linea caratteristica, la curva γ associata al punto P coincide con la S o con la S', e quindi è:

$$\lim_{t \to \infty} [y^2(t) + y'^2(t)] = 1/p^2,$$

essendo $\lim_{t \to \infty} y(t) = \pm 1/p$, $\lim_{t \to \infty} y'(t) = 0$.

Se il punto P *è esterno alla regione* Z, *dimostreremo che l'integrale soddisfacente alle condizioni iniziali* b) *è definito solo per valori di* t *minori di un valore finito* T *e che si ha:*

$$\lim_{t \to T} [y^2(t) + y'^2(t)] = +\infty.$$



Indichiamo al solito con γ la linea caratteristica associata al punto P considerato. Se il punto P si trova nel semipiano delle z positive, nella regione U' esterna a quella Z ed avente come origine la linea caratteristica S', la curva γ è definita in un intorno destro del punto P, risultando y funzione crescente di t, e la sua equazione ha la forma $z = g(y)$, presentando la curva il caso semplice rispetto all'asse delle z.

Indicato con T l'estremo superiore dei valori di t per cui è definito l'integrale dell'equazione differenziale a) soddisfacente alle condizioni b), non può essere $\lim_{t \to T} y(t) = \alpha$, $\lim_{t \to T} y'(t) = \beta$, con α e β finiti, nè per T finito, nè per $T = +\infty$, poichè:

nel primo caso il fatto che le funzioni $y(t)$ e $y'(t)$ risulterebbero prolungabili in nuovo intervallo consecutivo al primo, contrasterebbe alla ipotesi che T sia l'estremo superiore;

nel secondo caso il punto $y(t) = \alpha$, $y'(t) = z(t) = \beta$, sarebbe un punto singolare, mentre la curva γ non può passare per i colli A e A', nè raggiungere il punto O interno alla regione Z.

Quindi almeno uno dei due limiti deve essere infinito.

Se è $\beta = +\infty$, α non può essere finito essendo la curva γ decrescente nei punti esterni alla regione R_4 delimitata dalla curva Γ di equazione $z(y)$ per la quale si ha: $\lim\limits_{y \to +\infty} z(y) = +\infty$, e perciò risulta anche $\alpha = +\infty$.

Sia $\alpha = +\infty$ e dimostriamo che è anche $\beta = +\infty$.

Supponiamo che il punto P non appartenga alla regione R_4; la curva γ, decrescente nei punti esterni alle regioni R_2 e R_4, incontra almeno una volta la curva Γ (le cui ordinate ed ascisse tendono a più infinito) in un punto del primo quadrante. Indichiamo con w l'estremo superiore delle ascisse dei punti comuni alle due curve γ e Γ.

Se è $w = +\infty$, poichè per la curva Γ di equazione $z = z(y)$ si ha $\lim\limits_{y \to +\infty} z(y) = +\infty$, risulta che le ordinate e le ascisse della curva γ tendono a più infinito; infatti, fissato un k arbitrario possiamo trovare un punto P^0 di intersezione, di ascissa δ, tale che le ordinate di Γ per $y \geq \delta$ siano maggiori di k, ma allora un punto mobile sulla γ, che parta da P^0, ha anche lui le sue ordinate maggiori di k, e quindi è $\beta = +\infty$.

Consideriamo il caso che w sia finito; la γ per $y > w$ resta sempre o sopra la curva Γ, o fra la Γ e l'asse delle y; sempre sopra la Γ non può rimanere perchè ha andamento decrescente e le ordinate di Γ vanno all'infinito, essa resta quindi sempre interna alla regione R_4 e per $y > w$ è monotona crescente.

Se la curva γ tendesse asintoticamente ad una direzione parallela all'asse delle y, cioè fosse $\lim\limits_{y \to +\infty} g(y) = h$ con h costante positiva, si avrebbe $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{dg(y)}{dy} = +\infty$, essendo:

$$dg(y)/dy = dz/dy = (-z\,|\,z\,| - q_0 z - \chi(y) \cdot z - y + p^2 y^3)/z =$$
$$= -\,|\,z\,| - q_0 - \chi(y) - y/z + p^2 y^3/z =$$
$$= -\,|\,z\,| - q_0 + y^3(-\chi(y)/y^3 - 1/zy^2 + p^2/z)$$

e $\lim\limits_{y \to +\infty} (-\chi(y)/y^3 - 1/zy^2 + p^2/z) = p^2/h$ poichè si ha: $\chi(y) = o\left(|\,y\,|^{\frac{3}{2}}\right)$.

Risulta quindi che se è $\alpha = +\infty$, è pure $\beta = +\infty$.

Per la curva caratteristica relativa al punto P considerato si ha dunque:

$$\lim_{t \to T} [y^2(t) + y'^2(t)] = +\infty.$$

Se il punto P si trova sempre nella regione U' considerata ma nel semipiano delle z negative, la curva γ ad esso associata, decrescente in un intorno sinistro del punto P, taglia ortogonalmente l'asse delle y in un punto N di ascissa $y > 1/p$; in un intorno destro di questo punto N la curva ha andamento crescente ed i ragionamenti precedentemente svolti ci permettono di asserire che tanto se la curva γ è tutta contenuta, a partire dal punto N, nella regione R_4, quanto se essa incontra l'arco della curva Γ che delimita questa regione, si ha:

$$\lim_{t \to T} y(t) = +\infty, \qquad \lim_{t \to T} y'(t) = +\infty,$$

e quindi:

$$\lim_{t \to T} [y^2(t) + y'^2(t)] = +\infty.$$

I casi che il punto P sia interno alla regione R_4 oppure che il punto P sia un punto della semiretta delle ascisse positive a destra del punto A', rientrano in questo ora considerato; se il punto P si trova nella regione U esterna a quella Z ed avente come origine la linea caratteristica S, con ragionamento analogo si giunge alle stesse conclusioni.

Resta da dimostrare che è $T < +\infty$; ma le ipotesi fatte sulla $q(y)$ permettono di seguire una dimostrazione analoga a quella di J. CECCONI (7) per q costante positiva.

Nelle nostre ipotesi si ha infatti, a partire da un certo valore $\eta'' > 1/p$ di y:

$$q_0 > q_0/y' + \chi(y)/y',$$

cioè:

$$q_0 < q_0/z + \chi(y)/y^{\frac{3}{2}} : z/y^{\frac{3}{2}}, \text{ e } y' = |y'|$$

e quindi risultano positivi i due termini del secondo membro dell'equazione differenziale

$$a') \quad d\,\{ y'^2 e^{2y(1+q_0)} \} / dy = 2e^{2y(1+q_0)}(p^2y^3 - y) + 2e^{2y(1+q_0)} y'(q_0 y' - q_0 - \chi(y))$$

equivalente all'equazione differenziale a).

Indicato con t'' il valore di t per cui è $y = \eta''$ e posto $z(t)y = y'(t) = \zeta''$, integrando la a') rispetto ad y tra η'' e y si ottiene:

$$y'^2 = P(y) + \Phi(y) + (\zeta''^2 - P(\eta''))e^{2(\eta'' - y)(1+q_0)}$$

con:

$$P(y) = p^2y^3/(1+q_0) - 3p^2y^2/2(1+q_0)^2 - y(3p^2/2(1+q_0)^3 - 1/(1+q_0)) -$$
$$- 3p^2/4(1+q_0)^4 + 1/2(1+q_0)^2 > P(\eta'')e^{2(\eta''-y)(1+q_0)} > 0,$$

$$\Phi(y) = e^{-2y(1+q_0)} \int_{\eta''}^{y} y'(y'q_0 - q_0 - \chi(y))e^{2y(1+q_0)}dy > 0.$$

(7) Cfr. J. CECCONI, lav. cit. in (1), pp. 259-260.

Si ha quindi:

$$\int_{t''}^{t} dt = \int_{\eta''}^{y} \frac{dy}{\sqrt{P(y) + \Phi(y) + (\zeta''^2 - P(\eta''))e^{2(\eta''-y)(1+q_0)}}} ;$$

il radicando è sempre positivo e perciò la funzione integranda è continua in ogni intervallo a destra di η''; per $y \to +\infty$ la funzione $P(y) \to +\infty$ di ordine 3 rispetto ad y e si ha: $\lim_{y \to +\infty} \Phi(y) > 0$, $\lim_{y \to +\infty} (\zeta''^2 - P(\eta''))e^{2(\eta''-y)(1+q_0)} = 0$; il noto criterio di CAUCHY ci assicura che la funzione integranda è sommabile in $[\eta'', +\infty]$ ed il suo integrale ha valore determinato e finito.

Essendo:

$$T = t'' + \int_{\eta''}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{P(y) + \Phi(y) + (\zeta''^2 - P(\eta''))e^{2(\eta''-y)(1+q_0)}}}$$

è dimostrato che ha un valore finito l'estremo superiore dei valori di t per cui è definito l'integrale dell'equazione differenziale a) determinato dalle condizioni iniziali b).

8. Possiamo concludere, al termine della presente nota, che a tutti e soli punti interni alla regione Z considerata corrisponde mediante le condizioni iniziali b) un integrale dell'equazione differenziale a) in esame, definito per ogni valore di $t \geq t_0$ e stabile.

Tale integrale $y(t)$ per $q_0 \geq 2$ tende monotonamente a zero insieme alla sua derivata, mentre per $q_0 < 2$ tende a zero in modo oscillante; in questo ultimo caso, con ragionamento analogo a quello seguito da J. CECCONI considerando q costante positiva [8], si dimostra che pure nelle ipotesi presenti, posto $\nu^2 = 4 - q_0^2$, comunque si fissi un numero positivo τ, esiste un valore t' di t tale che in ogni intervallo di $[t, +\infty]$, di ampiezza $2\pi/\nu + \tau$, cade almeno uno zero di $y(t)$.

[8] Cfr. J. CECCONI, lav. cit. in [1], pp. 261-262.