Bollettino Unione Matematica Italiana

Enrico Bompiani

Un teorema del Bianchi sulle rigate applicabili.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.1, p. 1–4.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Un teorema del Bianchi sulle rigate applicabili.

Nota di ENRICO BOMPIANI (a Roma)

Sunto. - *Prese le mosse da un teorema del* BIANCHI *sulle rigate applicabili si stabilisce l'esistenza di un invariante relativo a due elementi differenziali E_3 e un nuovo modo di costruire rigate applicabili a partire da due curve* qualsiansi *in corrispondenza per uguaglianza d'archi. Indicazione di ulteriori possibili ricerche.*

1. Nelle prime pagine della sua tesi di laurea il BIANCHI (¹) dà il seguente teorema: *Se si hanno due curve* C *e* C′ *e per ciascuna di esse si considera la superficie gobba generata da una retta che si appoggia alla curva normalmente alla normale principale e fa un angolo costante* θ *colla curva, le due superficie generate saranno applicabili l'una sull'altra quando fra i raggi* R, T *di prima e seconda curvatura di* C *e quelli* R′, T′ *di* C′ *abbia luogo la relazione*

$$\frac{\cos\theta}{R}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{T}=\frac{\cos\theta}{R'}+\frac{\operatorname{sen}\theta}{T'}\,. \tag{1.1}$$

Questo teorema si può interpretare in un altro modo. Se P e P' sono punti corrispondenti di C e C' esso riguarda gli elementi del 3° ordine E_3, E_3' delle due curve aventi per origini o centri P e P' con le curvature R, T e R', T'. Per essi la relazione (1.1) determina un angolo θ definito da

$$\operatorname{tg}\theta=-\frac{\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{R'}}{\dfrac{1}{T}-\dfrac{1}{T'}} \tag{1.2}$$

(¹) Si veda il volume II delle Opere di L. BIANCHI, *Applicabilità e problemi di deformazione*, Edizioni Cremonese, Roma, 1953, p. 48-95.

Chiamiamo θ *angolo del Bianchi* relativo ai due E_3, E_3'. È ovvio che esso dipende soltanto dai due elementi e *non* dalla loro posizione reciproca nello spazio. Sicchè si possono pensare i due elementi come aventi la stessa origine, la stessa tangente, lo stesso piano osculatore. Come si determina in queste condizioni l'angolo del BIANCHI ?

2. Se si assume l'origine O di un sistema cartesiano triortogonale come origine degli elementi, e si assumono gli assi x, y, z come tangente, normale principale e binormale in O un elemento è rappresentato da

$$(2.1) \qquad x = s - \frac{s^3}{3!R^2} + [4], \quad y = \frac{s^2}{2R} + [3], \quad z = -\frac{s^3}{3!RT} + [4]$$

ove $[k]$ indica termini di grado $\geq k$ in s, e l'altro in modo analogo sostituendo R', T' ad R, T.

Nel piano xz (della tangente e della binormale) si prenda per l'origine la retta formante l'angolo φ con la tangente, $z = x \operatorname{tg} \varphi$, $y = 0$.

La proiezione $\overline{E}_3$ dell'E_3 da un punto *qualsiasi* di questa retta sul piano osculatore è

$$(2.2) \qquad \begin{aligned} x &= s - \frac{s^3}{3!}\frac{1}{R}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\frac{1}{T}\right) + [4] \\ y &= \frac{s^2}{2R} + [3] \end{aligned}$$

sicchè il rapporto $\dfrac{x-s}{sy}$ per s tendente a zero ha per limite

$$(2.3) \qquad -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\frac{1}{T}\right)$$

ed è perfettamente definito da E_3 e da φ.

L'angolo φ per cui i limiti relativi ad E_3, E_3' hanno lo *stesso* valore è definito da

$$(2.4) \qquad \cot\varphi = -\frac{\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R'}}{\dfrac{1}{T} - \dfrac{1}{T'}}.$$

L'angolo θ del Bianchi relativo ai due E_3 *è il complemento dell'angolo determinato con la costruzione precedente.*

In realtà la condizione di applicabilità delle due rigate dipende dall'uguaglianza

$$(2.5) \qquad \left(\frac{\cos\theta}{R} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{T}\right)^2 = \left(\frac{\cos\theta}{R'} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{T'}\right)^2$$

quindi oltre all'angolo θ definito dalla (1.2) c'è da considerare l'angolo θ' definito da

$$\operatorname{tg}\theta' = -\frac{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R'}}{\dfrac{1}{T}+\dfrac{1}{T'}}$$

Ciò porta a chiedersi il significato di θ' per i due elementi dati del 3° ordine. Si vede facilmente che ciò equivale a sostituire ad uno dei due elementi il simmetrico rispetto all'origine; e perciò la stessa determinazione precedente (con la sostituzione ora detta) fornisce θ'.

3. Il BIANCHI suppone nella sua costruzione θ costante e perciò le due curve tali che in punti corrispondenti valga la (1.1); ciò significa che dato un E_3, θ e un E_2' rimane determinata la torsione di E_3.

Ma in realtà la costanza dell'angolo non è necessaria per ricavare, con la costruzione del BIANCHI, coppie di rigate applicabili.

Si ripeta la costruzione del BIANCHI, assegnando una curva C, descritta dal punto $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ essendo u l'arco della curva e per ogni suo punto si conduca la retta normale alla normale principale che forma con la tangente l'angolo $\theta(u)$. Se il parametro v misura la lunghezza del segmento di generatrice fra un suo punto generico e quello appartenente a C, il ds^2 della rigata è dato (come subito si vede modificando lievemente le operazioni eseguite dal BIANCHI) da

$$ds^2 = \left\{ 1 + v^2\left(\frac{\cos\theta}{R} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{T}\right)^2 + v^2\theta_u{}^2 - 2v\operatorname{sen}\theta\cdot\theta_u \right\} du^2 + $$
$$+ 2\cos\theta\, du\, dv + dv^2.$$

Se per una seconda curva C', riferita alla prima per uguaglianza d'archi, si fa la stessa costruzione servendosi dello *stesso* angolo $\theta(u)$ e se questo soddisfa alla condizione (1.1) si ha per la seconda rigata lo stesso ds^2. Si ha perciò il teorema:

Date due curve ad arbitrio C, C′ *e una corrispondenza per uguaglianza d'archi fra esse, si determini in ogni coppia di punti corrispondenti (allo stesso valore di u) l'angolo del Bianchi* $\theta(u)$ *dei due* E_3 *che hanno origini in essi. Se per ciascuna curva si costruisce al modo del Bianchi la rigata caratterizzata da* $\theta(u)$ *si hanno due rigate applicabili.*

A differenza di quanto avviene nel teorema del BIANCHI, qui le due curve possono darsi ad arbitrio (purchè la costruzione sia determinata); risulta di conseguenza determinato l'angolo (che si è detto del BIANCHI) per cui vale l'applicabilità delle rigate.

È presto visto che ciascuna delle rigate ha per curva di strizione C o C' e che *condizione necessaria e sufficiente per l'applicabilità delle due rigate è che esse abbiano la stessa curvatura gaussiana in punti corrispondenti di* C *e di* C'. Questa condizione, equivalente alla (2.5), fornisce un nuovo significato geometrico per gli angoli θ, θ'.

4. Aggiungo qualche accenno relativo a problemi di cui altri potrá occuparsi.

Il teorema del n. 3 può trovare applicazioni alla teoria delle superficie. Si consideri un sistema ∞^1 di geodetiche sopra una superficie e la corrispondenza per uguaglianza d'archi determinata dalle traiettorie ortogonali. Il procedimento del numero 3 può applcarsi ad una geodetica e a quella infinitamente vicina (nel sistema ∞^1) e fornisce due rigate per la prima geodetica le cui generatrici sono tangenti alla superficie, quindi, integrando, due sistemi di curve sulla superficie (e le congruenze delle loro tangenti). Potrebbe forse valere la pena di esaminarle.

L'angolo invariante θ o φ per due E_3 nelle condizioni appresso specificate ha senso anche negli spazi riemanniani.

Si prendano due E_3 (in uno spazio riemanniano) con la stessa origine e la stessa giacitura osculatrice (giacitura principale relativa ad uno degli E_2 dati e all'E_2 di geodetica tangente).

La costruzione del numero 2 per là determinazione dell'angolo φ può ripetersi considerando una direzione per il centro dell'E_3 e le geodetiche per i suoi punti in direzioni parallele a quella nel senso di LEVI-CIVITA. Queste geodetiche segano la superficie geodetica osculatrice in un nuovo $\overline{E}_3$ (che si rappresenta in modo analogo a (2.2) riferendosi sulla superficie geodetica alla geodetica tangente ad E_3 e a quella ortogonale); la costruzione si completa poi come al numero 2.

Gli invarianti (θ, θ') considerati ai nn. precedenti dei due E_3 dipendono solo dalle loro curvature, ma *non* dalle derivate delle prime curvature nei loro centri; sicchè rimane arbitraria per ciascuno di essi la sfera osculatrice. In altri termini ciascun E_3 può variarsi intorno al suo E_2 rimanendo sopra un ben definito paraboloide ($xy = -3Tz$) avente per generatrici nell'origine la tangente e la normale principale e per asse la binormale; cioè ciascun E_3 può variare in un *pennello* e gli invarianti trovati sono relativi ai due pennelli.