Bollettino Unione Matematica Italiana

Lucio Lombardo-Radice

Sui sistemi cartesiani di coordinate dei piani grafici h-l-transitivi.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.1, p. 24–29.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_1_24_0>

Sui sistemi cartesiani di coordinate dei piani grafici h-l-transitivi.

Nota di LUCIO LOMBARDO-RADICE (a Roma).

Sunto [1]. - *Si dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema algebrico (anello di* HALL*) costituisca il sistema di coordinate che si ottiene in un piano grafico* h-l-*transitivo qualora si scelga la retta* l *come retta impropria, la retta* h *come asse delle* y, *è che esso sia il sistema inverso di uno pseudocorpo del* DICKSON.

1. Partiamo dall'ipotesi che in un piano grafico π esistano tutte le possibili omologie di asse l, aventi il centro sulla retta h distinta da l. Un piano siffatto sarà da noi chiamato, con R. BAER

(1) Una analoga caratterizzazione dei piani in questione (nel caso finito) è stata ottenuta, per via geometrico-gruppale, da G. ZAPPA, nella nota

[1], *piano* h-*l*-*transitivo*. Negli sviluppi che seguono, fino al momento in cui l'ipotesi della finitezza non verrà esplicitamente introdotta, π potrà essere sia finito che infinito.

Per un teorema del BAER ([1], pagg. 145-46) si ha che quando, e soltanto quando, π è V_0-l-transitivo (V_0 su l), cioè quando, e soltanto quando, esistono in π tutte le omologie (speciali) di dato asse l e dato centro V_0 su l, le coordinate di HALL di π (per esse v. [2], o anche [4]), qualora si fissi l come retta impropria, V_0 come punto improprio dell'asse y, formano un sistema a doppia composizione, chiamato dal BAER sistema cartesiano, caratterizzato dai seguenti assiomi (2):

(0) Gli elementi formano gruppo di fronte alla addizione (si indicherà con 0 l'elemento neutro di tale gruppo).

(1) Per ogni a, $0a = a0 = 0$;

(2) Da $a \neq b$ e $c \neq d$ segue $ca - cb \neq da - db$.

(3) Esiste un elemento 1, tale che $1a = a1$ per ogni a.

(4) Dati tre elementi a, b, c, con $a \neq c$, esiste un x tale che: $xa - xb = c$ (x è allora unico per (2)).

(5) Dati tre elementi a, b, c con $a \neq b$, esiste un y tale che: $-ay + by = c$ (y è allora unico per (2)).

Assumendo come punto improprio dell'asse y il punto di incontro V_0 di h e di l, scelta come retta impropria (o assumendo addirittura, come nel seguito si farà sistematicamente, la retta $h \neq l$ come asse delle y) si ha immediatamente che un piano h-l-transitivo è a maggior ragione V_0-l-transitivo, e che pertanto le sue coordinate di HALL verificano gli assiomi (1), ..., (5). Ma nel caso che un piano V_0-l-transitivo sia addirittura $(O + V_0)$-l-transitivo, cioè h-l-transitivo ($O + V_0 = h$, O su h diverso da V_0) tali coordinate renderanno soddisfatti anche gli assiomi:

(6) $r(s + t) = rs + rt$, quali che siano r, s, t in F.

(7) $r(st) = (rs)t$, quali che siano r, s, t in F.

Sui piani grafici finiti h-l-*transitivi* (che compare in questo stesso fascicolo). In seguito a cortese proposta fattami dallo stesso prof. ZAPPA, ho ottenuto la presente caratterizzazione di detti piani (valevole anche nel caso infinito) per via strettamente algebrica, attraverso la considerazione del sistema delle loro coordinate.

(2) Adottiamo la formulazione degli assiomi che si trova in [7] (PICKERT), lievemente diversa da quella introdotta da BAER, ma ad essa equivalente.

Vale infatti un altro teorema di BAER ([1], pag. 146):

Un piano lineare π sul sistema cartesiano F *è* h-l-*transitivo se, e soltanto se, sono soddisfatte in* F *le condizioni* (6), (7).

Inoltre, in una sua recente nota, ([7], pag. 336), G. PICKERT ha dimostrato, tra l'altro, che:

Ogni sistema cartesiano distributivo a sinistra, oppure a destra, è commutativo rispetto alla addizione (3); in altri termini, nel caso che ci interessa, da (1), ..., (6) discende:

$$r + s = s + r. \tag{8}$$

Riassumendo questi risultati già noti, potremo dire che *un sistema* F *i cui elementi rendano soddisfatte le relazioni* (1), ... (8) *è il sistema cartesiano di un piano grafico* h-l-*transitivo*; *viceversa, dato un piano grafico* h-l-*transitivo le sue coordinate* (scelta l come retta impropria, h come asse delle y) *formano un sistema algebrico* F *a doppia composizione per il quale valgono* (1), ..., (8).

Consideriamo ora, accanto ad F, il sistema inverso (4) $\dot{F}$. Esso si definisce così: $\dot{\mathrm{F}}$ *è un insieme i cui elementi coincidono con quelli di* $\dot{\mathrm{F}}$; *in* F *esistono due operazioni, una addizione* (simbolo $\dot{+}$), *e una moltiplicazione* (simbolo $\dot{\times}$), *che si definiscono a partire dalle omonime operazioni in* F *nel seguente modo:*

$$a \dot{+} b = b + a;$$
$$a \dot{\times} b = ba.$$

Nell'ipotesi che F soddisfi (1), ..., (8), si vede facilmente che $\dot{F}$ soddisfa (1), ..., (5), (7), (8) e:

$$(s \dot{+} t) \dot{\times} r = s \dot{\times} r \dot{+} t \dot{\times} r. \tag{6'}$$

Infatti, passando dalle due operazioni di F alle operazioni inverse $\dot{+}$ e $\dot{\times}$, (1), (2), (3), (7) e (8) vengono mutate in sè, (4) e (5) si scambiano tra di loro. mentre (6) si muta in (6') (a prescindere, ovviamente, dai mutati simboli operatori). Ma allora $\dot{F}$ è uno pseudo-

(3) Il prof. GÜNTER PICKERT osserva, in una nota a piè di pagina di [7], che questo suo teorema si può «*auch sehr einfach geometrisch beweisen*» partendo dal fatto che l'aggiunta di (6)' a (1), ..., (5) equivale alla ipotesi geometrica che il piano dato sia l-l-transitivo. Una tale dimostrazione geometrica è implicita in un risultato di B. SEGRE ([8], pag. 115) che suona, nella sua sostanza, così: *Le traslazioni di un piano* l-l-*transitivo costituiscono un gruppo abeliano.*

(4) Propongo di tradurre così il termine tedesco «entgegengesetzte System» che trovo usato in PICKERT, [7].

corpo del DICKSON (5), cioè un sistema a doppia composizione nel quale sono verificati tutti gli assiomi di un corpo, eccezion fatta al più per la proprietà distributiva a sinistra (6). Viceversa, dato uno pseudocorpo del DICKSON, il suo sistema inverso soddisfa le relazioni (1), (2),..., (8), e pertanto, concludendo:

I,1. - *I piani grafici* h-l-*transitivi sono, tutti e soli, i piani lineari sopra un sistema inverso di uno pseudocorpo del* DICKSON, *(completati dalla retta impropria* l *e dai suoi punti).*

Ora, è noto che gli pseudocorpi del DICKSON, *nel caso finito*, hanno necessariamente ordine uguale alla potenza, p^t, di un numero primo p; che essi si ottengono, tutti e soli, in corrispondenza dei gruppi M di ordine $p^t - 1$ di automorfismi (di un gruppo abeliano elementare A di ordine p^t) semplicemente transitivi sui $p^t - 1$ elementi non nulli di A; che essi si riducono a un ordinario corpo finito quando e solo quando M è commutativo, e allora di necessità ciclico e che ciò conduce al caso del piano desarguesiano finito di rango $n = p^t$; che, infine, quando M non è commutativo, e con ciò neppure ciclico, A è il sistema cartesiano di coordinate di un piano non desarguesiano, e che questo ultimo caso può effettivamente presentarsi (6). Si ha allora che:

(5) Nella mia nota [5] ho usato impropriamente il termine «pseudocorpi del LEVI», riferendomi ai sistemi algebrici ora in discorso, ai quali F. W. LEVI dedica una delle sue conferenze del 1942 raccolte nell'opuscolo [3]. In realtà, i risultati ivi esposti si debbono nella massima parte a H. ZASSENHAUS, che li ha comunicati nella sua memoria [10] del 1936. Tali sistemi algebrici, caratterizzati dallo ZASSENHAUS nel modo esposto poi dal LEVI, erano stati però considerati per la prima volta dal DICKSON (e subito dopo dal VEBLEN); di qui la denominazione di «pseudocorpi del DICKSON» prescelta da G. ZAPPA in [9] e da me seguita nella presente nota. Lo ZASSENHAUS, nella memoria citata, usa il nome di «quasicorpi completi», «*vollständige Fastkörper*», ad indicare quei sistemi che nella presente nota sono chiamati «sistemi inversi di uno pseudocorpo del DICKSON». Ora, sarebbe forse opportuno chiamare *quasicorpi* sia gli pseudocorpi del DICKSON che i loro sistemi inversi, *pseudocorpi* i sistemi algebrici più generali caratterizzati dagli assiomi (1),..., (6), o (1),..., (6′), ma non (7) (associatività del prodotto), cioè i cosidetti «sistemi di VEBLEN-WEDDERBURN».

(6) Per tutti questi risultati vedi le memorie [10] di ZASSENHAUS o, l'opuscolo [3] di F. LEVI, o anche la mia nota [5], dove essi si possono dedurre come caso particolare di risultati più generali relativi a pseudocorpi di VEBLEN-WEDDERBURN finiti quali si vogliano. Nella successiva nota [6] si vede, tra l'altro, che, *anche nel caso infinito*, uno pseudocorpo di V. W. è un p-gruppo abeliano additivo, e anzi che gli elementi non nulli del gruppo additivo hanno tutti periodo uguale al numero primo p.

II,1. – *I piani grafici finiti* h–l–*transitivi hanno rango uguale alla potenza,* p^t, *di un numero primo* p; *essi si ottengono, tutti e soli, in corrispondenza dei gruppi* M *di* $p^t - 1$ *automorfismi (di un gruppo abeliano elementare* A *di ordine* p^t*) semplicemente transitivi sui* $p^t - 1$ *elementi non nulli di* A. *Un piano siffatto,* π_M, *è non desarguesiano quando e soltanto quando il gruppo* M *ad esso relativo è non ciclico; le sue coordinate formano un sistema cartesiano* F *che è isomorfo ad* A *rispetto all'addizione, mentre gli elementi non nulli di* F *formano un gruppo «anti–isomorfo» a* M (al prodotto di due elementi, presi in un dato ordine, corrisponde il prodotto dei corrispondenti, presi in ordine inverso ([7])).

2. Siamo pervenuti in questo modo ad una caratterizzazione geometrica, che possiamo dire *indiretta,* dei piani grafici sopra pseudocorpi del DICKSON. Un piano sopra uno pseudocorpo del DICKSON è un caso particolare di piano *l–l*–transitivo, cioè di piano grafico nel quale esistono tutte le omologie di dato asse *l* e di centro *L* comunque assegnato su *l* ([8]). Uno pseudocorpo del DICKSON è caratterizzato *algebricamente,* in modo diretto, dal fatto che le sue coordinate non nulle (assunta *l* come retta impropria) formano gruppo rispetto al prodotto, mentre ciò non accade necessariamente per uno pseudocorpo di VEBLEN–WEDDERBURN, mancando nel caso generale la proprietà associativa del prodotto tra gli assiomi caratteristici. Uno pseudocorpo del DICKSON viene ora caratterizzato *geometricamente,* in modo indiretto, dal fatto che il piano grafico sopra il sistema inverso è *h–l*–transitivo (essendo *h* una retta diversa da *l*). Insomma:

I,2. – *Tra i piani* l–l–*transitivi i piani sopra pseudocorpi del* DICKSON *sono caratterizzati geometricamente dal fatto che per essi, e per essi soltanto, il piano sopra il sistema inverso è* h–l–*transitivo (*h *diverso da* l*).*

([7]) Ciò si deduce dal fatto (e per esso v. ancora [3], o [5]), che in uno pseudocorpo del DICKSON gli elementi non nulli formano un gruppo moltiplicativo *isomorfo* a *M.*

([8]) Ciò vuol dire che è verificato il piccolo teorema di DESARGUES quando si scelga *l* come asse, *L* come centro; e perciò tali piani sono stati da me chiamati «microdesarguesiani affini» in [5], [6]. Ciò vuol dire anche che esistono tutte le possibili «traslazioni» (*l* si pensi come retta all'infinito): e di qui il nome di *Translationsebene* che viene usato da autori di lingua tedesca (v. ad es. [7]).

BIBLIOGRAFIA

[1] R. BAER, *Homogeneity of projective planes*, « Amer. Journ. of Math. » 64, (1942).

[2] M. HALL, *Projective planes*, « Trans. of the Amer. Math. Soc. », vol. 54, n. 1, 1943.

[3] F. W. LEVI, *Finite geometrical systems*, Calcutta 1942.

[4] L. LOMBARDO-RADICE, *Assiomi algebrici e postulati geometrici*, « Archimede », fasc. 5, 1951.

[5] — —, *Sui piani grafici a coordinate di* VEBLEN-WEDDERBURN, in corso di stampa in « Ricerche di Matematica », 2, 1953.

[6] — —, *Sui piani microdesarguesiani affini*, « Rendiconti della Acc. Naz. dei Lincei », serie VIII, vol. XV, fasc. 5, novembre 1953.

[7] G. PICKERT, *Nichtkommutative cartesische Gruppen*, « Archiv der Mathematik », vol. III, fasc. 5, 1952.

[8] B. SEGRE, *Lezioni di geometria moderna*, Zanichelli, Bologna, 1948.

[9] G. ZAPPA, *Sui piani grafici finiti* h-l-*transitivi*, « Bollettino dell'U.M.I. », Serie III, Anno IX, n. 1, marzo 1954.

[10] H. ZASSENHAUS, *Uber endliche Fastkörper*, « Abhandlungen Math. Seminar der Hansischen Univ », vol. II, fasc. 1/2. 1935-36.