Bollettino Unione Matematica Italiana

Letterio Toscano

Le funzioni del cilindro parabolico come caso limite delle funzioni ipergeometriche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.1, p. 29–38.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_1_29_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

Le funzioni del cilindro parabolico come caso limite delle funzioni ipergeometriche.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sunto. - *Si completa una formula limite di* FELDHEIM *e se ne stabilisce un'altra, per il passaggio dalle funzioni ipergeometriche* $_1F_1$ *e* $_2F_1$ *a quelle del cilindro parabolico. Successivamente, quali applicazioni, si trovano altri risultati.*

1. La funzione $D_\nu(x)$ del cilindro parabolico si definisce — mediante la funzione ipergeometrica confluente di KUMMER — con la relazione

$$
\begin{aligned}
D_\nu(x) = {} & \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} 2^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} {}_1F_1\left(\frac{-\nu}{2}; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{2}\right) + \\
& + \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-\nu}{2}\right)} 2^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4}} x\, {}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2}; \frac{3}{2}; \frac{x^2}{2}\right).
\end{aligned} \tag{1}
$$

Per ν diverso da intero negativo essa ammette la rappresentazione integrale

$$(2)\qquad D_\nu(x) = -\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i}\, e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{\infty}^{(0+)} (-t)^{-\nu-1} e^{-xt-\frac{t^2}{2}} dt.$$

E prendendo le mosse dalla

$$(3)\qquad {}_1F_1(-\nu\,;\, c\,;\, x) = -\frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(c)}{2\pi i \Gamma(c+\nu)} \int_1^{(0+)} (-u)^{-\nu-1}(1-u)^{c+\nu-1} e^{ux} du \qquad R(c+\nu) > 0$$

per pervenire alla (2), E. FELDHEIM ([1]) ha stabilito la relazione limite

$$(4)\qquad \lim_{\omega\to\infty} \frac{\Gamma(\omega^2+k+\nu+1)}{\omega^\nu \Gamma(\omega^2+k+1)}\, {}_1F_1(-\nu\,;\, \omega^2+k+1\,;\, \omega^2-\omega x) = e^{\frac{x^2}{4}} D_\nu(x),$$

con k arbitrario e sempre per $\nu \neq -1, -2, -3, \ldots$.

La restrizione per ν si può però togliere. Basta sostituire le (2) e (3) con le

$$(2')\qquad D_\nu(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)}\, e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^\infty t^{-\nu-1} e^{-xt-\frac{t^2}{2}} dt \qquad R(\nu) < 0$$

$$(3')\qquad {}_1F_1(-\nu\,;\, c\,;\, x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(-\nu)\Gamma(c+\nu)} \int_0^1 u^{-\nu-1}(1-u)^{c+\nu-1} e^{ux} dx \qquad R(c+\nu) > 0$$

e seguire lo stesso procedimento.

Quindi la (4) è valida più in generale per ν qualsiasi.

2. Stabiliamo ora una nuova relazione limite.

Consideriamo per la funzione ipergeometrica di GAUSS la rappresentazione

$$(5)\qquad {}_2F_1(a,\, b\,;\, c\,;\, x) = -\frac{\Gamma(1-b)\Gamma(c)}{2\pi i \Gamma(c-b)} \int_1^{(0+)} (-u)^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-ux)^{-a} du,$$

con b diverso da intero positivo e $R(c-b) > 0$.

Facciamo

$$b = -\nu, \qquad a = s+h+\nu$$

$$c = \frac{s+k+1}{2}, \qquad x = \frac{1-x/\sqrt{s}}{2}$$

([1]) E. FELDHEIM, *Alcuni risultati sulle funzioni di Whittaker e del cilindro parabolico*, « Atti Acc. Sci. Torino », (76), 541-555, (1941).

con ν diverso da intero negativo, h e k qualsiasi. Si ha

$$
{}_2F_1\left(s+h+\nu,\ -\nu\,;\ \frac{s+k+1}{2}\,;\ \frac{1-x/\sqrt{s}}{2}\right)=
$$

$$
=-\frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma\left(\frac{s+k+1}{2}\right)}{2\pi i\Gamma\left(\frac{s+k+1}{2}+\nu\right)}\int_1^{(0+)}(-u)^{-\nu-1}(1-u)^{\frac{s+k+1}{2}}\left(1-u\frac{1-x/\sqrt{s}}{2}\right)^{-s-h-\nu}du.
$$

Ed ancora, con $u=2t/\sqrt{s}$, segue

$$
\frac{\Gamma(s+\nu)}{s^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(s)}\,{}_2F_1\left(-\nu,\ s+h+\nu\,;\ \frac{s+k+1}{2}\,;\ \frac{1-x/\sqrt{s}}{2}\right)=
$$

$$
=\frac{\Gamma(s+\nu)}{s^{\nu}\Gamma(s)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{s+k+1}{2}\right)\left(\frac{s+k+1}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\frac{s+k+1}{2}+\nu\right)}\cdot\frac{s^{\nu}}{2^{\nu}\left(\frac{s+k+1}{2}\right)^{\nu}}\cdot\frac{-\Gamma(\nu+1)}{2\pi i}\cdot
$$

$$
\cdot\int_{\frac{\sqrt{s}}{2}}^{(0+)}(-t)^{-\nu-1}\left(1-\frac{2t}{\sqrt{s}}\right)^{\frac{s+k+1}{2}}\left(1-\frac{2t}{\sqrt{s}}\,\frac{1-x/\sqrt{s}}{2}\right)^{-s-h-\nu}dt.
$$

Intanto per $\left|\frac{2t}{\sqrt{s}}\right|<1$ e $\left|\frac{2t}{\sqrt{s}}\,\frac{1-x/\sqrt{s}}{2}\right|<1$ si ha

$$
\log\left(1-\frac{2t}{\sqrt{s}}\right)^{\frac{s}{2}}\left(1-\frac{2t}{\sqrt{s}}\,\frac{1-x/\sqrt{s}}{2}\right)^{-s}=
$$

$$
=-\frac{s}{2}\left[\frac{2t}{\sqrt{s}}+\frac{4t^2}{2s}+\frac{8t^3}{3s\sqrt{s}}+\dots\right]+
$$

$$
+s\left[\frac{2t}{\sqrt{s}}\,\frac{1-x/\sqrt{s}}{2}+\frac{4t^2}{2s}\,\frac{(1-x/\sqrt{s})^2}{4}+\frac{8t^3}{3s\sqrt{s}}\,\frac{(1-x/\sqrt{s})^3}{8}+\dots\right]=
$$

$$
=-xt-\frac{t^2}{2}-\frac{s}{2}\left[\frac{8t^3}{3s\sqrt{s}}+\dots\right]+
$$

$$
+s\left[\frac{4t^2}{2s}\,\frac{x^2/s-2x/\sqrt{s}}{4}+\frac{8t^3}{3s\sqrt{s}}\,\frac{(1-x/\sqrt{s})^3}{8}+\dots\right].
$$

Al limite per $s\to\infty$ risulta

$$
\lim_{s\to\infty}\log\left(1-\frac{2t}{\sqrt{s}}\right)^{\frac{s}{2}}\left(1-\frac{2t}{\sqrt{s}}\,\frac{1-x/\sqrt{s}}{2}\right)^{-s}=-xt-\frac{t^2}{2}.
$$

Si ha pure

$$
\log\lim_{s\to\infty}\left(1-\frac{2t}{\sqrt{s}}\right)^{\frac{s}{2}}\left(1-\frac{2t}{\sqrt{s}}\,\frac{1-x/\sqrt{s}}{2}\right)^{-s}=-xt-\frac{t^2}{2},
$$

e quindi

$$\lim_{s\to\infty}\left(1-\frac{2t}{\sqrt{s}}\right)^{\frac{s}{2}}\left(1-\frac{2t}{\sqrt{s}}\,\frac{1-x/\sqrt{s}}{2}\right)^{-s}=e^{-xt-\frac{t^2}{2}}.$$

Inoltre

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\Gamma(s+\nu)}{s^\nu\Gamma(s)}=1$$

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{s+k+1}{2}\right)\left(\frac{s+k+1}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{s+k+1}{2}+\nu\right)}=1$$

$$\lim_{s\to\infty}\frac{s^\nu}{2^\nu\left(\frac{s+k+1}{2}\right)^\nu}=1.$$

Allora, risalendo

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\Gamma(s+\nu)}{s^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(s)}\,{}_2F_1\left(-\nu,\ s+h+\nu;\ \frac{s+k+1}{2};\ \frac{1-x/\sqrt{s}}{2}\right)=$$

$$=-\frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i}\int_\infty^{(0+)}(-t)^{-\nu-1}e^{-xt-\frac{t^2}{2}}dt,$$

e per la (2) si perviene alla relazione limite

$$(6)\quad \lim_{s\to\infty}\frac{\Gamma(s+\nu)}{s^{\frac{\nu}{2}}\Gamma(s)}\,{}_2F_1\left(-\nu,\ s+h+\nu;\ \frac{s+k+1}{2};\ \frac{1-x/\sqrt{s}}{2}\right)=e^{\frac{x^2}{4}}D_\nu(x)$$

$$\nu\neq-1,\ -2,\ -3,\dots.$$

Sostituendo alla (5) la

$$(5')\quad {}_2F_1(a,\ b;\ c;\ x)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-ux)^{-a}du,$$

con b diverso da intero negativo e $R(c-b)>0$, alla (2) la (2′), e operando come sopra, si trova che la (6) è valida anche per ν intero negativo.

Quindi essa è valida per ν qualsiasi.

3. Le formule (4) e (6) provano che la funzione del cilindro parabolico è legata alle ipergeometriche anche per via limite.

Procedendo da queste si possono ottenere relazioni sulle funzioni del cilindro parabolico. Così, in analogia a quanto si trova in Feldheim a proposito della (4), dalla ([2])

$${}_2F_1(a,\ b;\ c;\ x)\,{}_2F_1(a,\ b';\ c;\ x)=$$

$$=\sum_0^\infty{}_r\,\frac{(a,\ r)(b,\ r)(b',\ r)(c-a,\ r)}{(c,\ r)(c,\ 2r)r\,!}(-x^2)^r\,{}_2F_1(a+r,\ b+b'+2r;\ c+2r;\ x)$$

([2]) L. Toscano, *Formule di trasformazione e sviluppi sulle funzioni ipergeometriche a due variabili*, « Annali di Matematica », S. IV, (XXXIII), 119-134, (1952).

si può dedurre con la (6) che

$$e^{\frac{x^2}{4}} D_\mu(x) D_\nu(x) = \sum_0^\infty {}_r \frac{(-\mu,\ r)(-\nu,\ r)}{r\,!} D_{\mu+\nu-2r}(x).$$

Introdotta la funzione degli errori

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

e osservato che la sua complementare

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

è legata alla $D_{-1}(x\sqrt{2})$, si può dedurre la formula limite

$$\lim_{\omega \to \infty} \omega(\omega^2 + k)_1 F_1(1\,;\ \omega^2 + k + 1\,;\ \omega^2 - \omega x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{\frac{x^2}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Se ν è intero positivo dalle (4) e (6) si riottengono note formule che dai polinomi di LAGUERRE o ultrasferici conducono a quelli di HERMITE.

Il caso ν intero negativo $(-n-1)$ conduce a nuove formule degne di nota.

Introducendo i polinomi di HERMITE

$$H_{2n}(x) = \frac{(-1)^n (2n)\,!}{2^n n\,!}\, {}_1F_1\left(-n\,;\ \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{2}\right)$$

$$H_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n (2n+1)\,!}{2^n n\,!}\, x\, {}_1F_1\left(-n\,;\ \frac{3}{2};\ \frac{x^2}{2}\right)$$

e le funzioni di HERMITE di seconda specie

$$h_{2n}(x) = (-2)^n n\,!\, x\, {}_1F_1\left(-n + \frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{x^2}{2}\right)$$

$$h_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} 2^n n\,!\, {}_1F_1\left(\quad n \quad \frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{2}\right),$$

dalla (1) è facile dedurre che

(7) $$D_{-n-1}(ix) = \frac{(-1)^{\frac{3}{2}(n+1)}}{n\,!} e^{-\frac{x^2}{4}} \left[h_n(x) + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, H_n(x)\right].$$

E ponendo nella (4)

$$\nu = -n - 1, \qquad \omega^2 = -\alpha, \qquad x = ix,$$

e facendo qualche semplificazione, si trova

$$(8)\qquad \begin{aligned}\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-\frac{n+1}{2}} {}_1F_1(n+1\,;\ k+1-\alpha\,;\ x\sqrt{\alpha}-\alpha) = \\ = \frac{1}{n\,!} e^{-\frac{x^2}{2}} \left[h_n(x) + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, H_n(x)\right].\end{aligned}$$

Mentre dalla (6), per $\nu = -n-1$ e $x \equiv ix$, si ottiene

$$(9)\qquad \begin{aligned}\lim_{s\to\infty} s^{-\frac{n+1}{2}} {}_2F_1\left(n+1\,;\ s+h-n-1\,;\ \frac{s+k+1}{2}\,;\ \frac{1-ix/\sqrt{s}}{2}\right) = \\ = \frac{(-1)^{\frac{3}{2}(n+1)}}{n\,!}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \left[h_n(x) + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, H_n(x)\right].\end{aligned}$$

4. Le formule (8) e (9) si possono presentare sotto altra forma, utile per le applicazioni, introducendo le funzioni di LAGUERRE di seconda specie

$$l_n^{(\alpha)}(x) = -\Gamma(\alpha) x^{-\alpha} {}_1F_1(-\alpha-n\,;\ 1-\alpha\,;\ x)$$

e quelle ultrasferiche di seconda specie

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = \\ = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha+n)(x-1)^{-2\alpha-n}}{2^{n+1}\Gamma(\alpha+n+1)}\, {}_2F_1\left(2\alpha+n,\ \alpha+n+\frac{1}{2}\,;\ 2\alpha+2n+1\,;\ \frac{2}{1-x}\right).$$

Per le prime si ha

$$\frac{x^{\alpha}e^{-x}}{\Gamma(\alpha+1)}\, l_n^{(\alpha)}(x) = \frac{-1}{\alpha}\, {}_1F_1(n+1\,;\ 1-\alpha\,;\ -x).$$

Sostituendo x con $\alpha - x\sqrt{\alpha}$ e passando al limite per $\alpha \to \infty$ segue

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-\frac{n-1}{2}} (\alpha - x\sqrt{\alpha})^{\alpha} e^{x\sqrt{\alpha}-\alpha} l_n^{(\alpha)}(\alpha - x\sqrt{\alpha}) = \\ = -\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-\frac{n+1}{2}} {}_1F_1(n+1\,;\ 1-\alpha\,;\ x\sqrt{\alpha}-\alpha).\end{aligned}$$

E per la (8) si conclude

$$(10)\qquad \begin{aligned}\lim_{\alpha\to\infty} \frac{\alpha^{-\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)} (\alpha - x\sqrt{\alpha})^{\alpha} e^{x\sqrt{\alpha}-\alpha} l_n^{(\alpha)}(\alpha - x\sqrt{\alpha}) = \\ = \frac{-1}{n\,!} e^{-\frac{x^2}{2}} \left[h_n(x) + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, H_n(x)\right].\end{aligned}$$

Per le ultrasferiche cominciamo con l'applicare la prima formula di trasformazione di EULERO. Si ha

$$Q_n^{(\alpha)}(x)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha+n)}{2^{n+1}\Gamma(\alpha+n+1)}(x-1)^{-\alpha+\frac{1}{2}}(x+1)^{-\alpha-n-\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\,{}_2F_1\left(n+1,\ \alpha+n+\frac{1}{2};\ 2\alpha+2n+1;\ \frac{2}{1+x}\right).$$

Applichiamo poi la

$${}_2F_1(a,\ b;\ 2b;\ z)=(1-z)^{-\frac{a}{2}}{}_2F_1\left[a,\ 2b-a;\ b+\frac{1}{2};\ \frac{(1-\sqrt{1-z})^2}{-4\sqrt{1-z}}\right],$$

e si deduce

$$Q_n^{(\alpha)}(x)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha+n)}{2^{n+1}\Gamma(\alpha+n+1)}(x^2-1)^{-\alpha-\frac{n}{2}}\cdot$$

$$\cdot\,{}_2F_1\left[n+1,\ 2\alpha+n;\ \alpha+n+1;\ \frac{1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{2}\right].$$

Intanto riprendiamo la (9) e facciamo in essa

$$s=2\alpha-x^2,\qquad h=k=x^2+2n+1.$$

Risulta

$$\lim_{\alpha\to\infty}(2\alpha-x^2)^{-\frac{n+1}{2}}{}_2F_1\left[n+1;\ 2\alpha+n;\ \alpha+n+1;\ \frac{1-\dfrac{x}{\sqrt{2\alpha}}\Big/\sqrt{\dfrac{x^2}{2\alpha}-1}}{2}\right]=$$

$$=\frac{(-1)^{\frac{3}{2}(n+1)}}{n!}e^{-\frac{x^2}{2}}\left[h_n(x)+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,H_n(x)\right].$$

Da questa, per confronto con l'ultima espressione di $Q_n^{(\alpha)}(x)$ e con successive semplificazioni, si conclude

$$\lim_{\alpha\to\infty}\frac{\alpha^{-\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(2\alpha)}\left(\frac{x^2}{\alpha}-1\right)^{\alpha-\frac{1}{2}}Q_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)=\tag{11}$$

$$=\frac{2^{\frac{n-1}{2}}}{n!}e^{-x^2}\left[h_n(x\sqrt{2})+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,H_n(x\sqrt{2})\right].$$

5. Le funzioni di seconda specie di LAGUERRE e ultrasferiche sono legate ai polinomi di LAGUERRE e ultrasferici

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\frac{(\alpha+1,\ n)}{n!}{}_1F_1(-n;\ \alpha+1;\ x)$$

$$P_n^{(\alpha)}(x)=\frac{\Gamma(2\alpha+n)}{n!\,\Gamma(2\alpha)}{}_2F_1\left(-n,\ 2\alpha+n;\ \alpha+\frac{1}{2};\ \frac{1-x}{2}\right)$$

dalle formule di riduzione [3]

$$l_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) l_0^{(\alpha)}(x) + \Gamma(\alpha+1) x^{-\alpha} e^x F_{n-1}^{(\alpha)}(x)$$

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = P_n^{(\alpha)}(x) Q_0^{(\alpha)}(x) - \Gamma(2\alpha)(x^2-1)^{-\alpha+\frac{1}{2}} R_{n-1}^{(\alpha)}(x),$$

dove $F_{n-1}^{(\alpha)}(x)$ e $R_{n-1}^{(\alpha)}(x)$ sono polinomi di grado $n-1$.

Essi soddisfano alle relazioni ricorrenti

$$(n+1)F_n^{(\alpha)}(x) + (x-\alpha-2n-1)F_{n-1}^{(\alpha)}(x) + (\alpha+n)F_{n-2}^{(\alpha)}(x) = 0$$

$$(n+1)R_n^{(\alpha)}(x) - 2(\alpha+n)xR_{n-1}^{(\alpha)}(x) + (2\alpha+n-1)R_{n-2}^{(\alpha)}(x) = 0,$$

dalle quali si deducono facilmente le rappresentazioni

$$(-1)^n(n+1)!\, F_n^{(\alpha)}(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} x-2n-\alpha-1 & \alpha+n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n & x-2n-\alpha+1 & \alpha+n-1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & x-2n-\alpha+3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-\alpha-7 & \alpha+3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & x-\alpha-5 & \alpha+2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & x-\alpha-3 \end{vmatrix}$$

$$(n+1)!\, R_n^{(\alpha)}(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} 2(\alpha+n)x & 2\alpha+n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ n & 2(\alpha+n-1)x & 2\alpha+n-2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 2(\alpha+n-2)x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2(\alpha+3)x & 2\alpha+2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2(\alpha+2)x & 2\alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 2(\alpha+1)x \end{vmatrix}$$

Per gli $F_n^{(\alpha)}(x)$ moltiplichiamo gli elementi sulla prima parallela al disopra della diagonale principale per

$$\sqrt{\frac{n}{\alpha+n}},\quad \sqrt{\frac{n-1}{\alpha+n-1}},\dots,\quad \sqrt{\frac{3}{\alpha+3}},\quad \sqrt{\frac{2}{\alpha+2}}$$

e dividiamo gli elementi sulla prima parallela al disotto per le stesse quantità; sostituiamo x con $\alpha - x\sqrt{\alpha}$, dividiamo ogni riga

(3) P. Humbert, *A reduction-formula for the functions of the second kind connected with the polynomials of applied mathematics*, « Proc. Soc. Edinburg », (XXXVIII), 61-69, (1917-18).

del determinante per $\sqrt{\alpha}$, e procediamo al limite per $\alpha \to \infty$. tenendo presente che nel determinante basta operare sui singoli elementi (4).

Si ottiene

$$(n+1)!\lim_{\alpha\to\infty}\alpha^{-\frac{n}{2}}F_n^{(\alpha)}(\alpha - x\sqrt{\alpha}) =$$

$$= \begin{vmatrix} x & \sqrt{n} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{n} & x & \sqrt{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{n-1} & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{3} & x & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{2} & x \end{vmatrix}$$

Il determinante a secondo membro — come si potrebbe far vedere — rappresenta il noto polinomio associato a quello di Hermite, e che, seguendo il Nielsen (5) denotiamo con $G_n(x)$. Allora vale la formula limite

$$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha^{-\frac{n}{2}}F_n^{(\alpha)}(\alpha - x\sqrt{\alpha}) = \frac{1}{(n+1)!}G_n(x). \tag{12}$$

Per gli $R_n^{(\alpha)}(x)$ moltiplichiamo gli elementi sulla prima parallela al disopra della diagonale principale per

$$\sqrt{\frac{n}{2\alpha+n-1}},\ \sqrt{\frac{n-1}{2\alpha+n-2}},\dots,\ \sqrt{\frac{3}{2\alpha+2}},\ \sqrt{\frac{2}{2\alpha+1}}$$

e dividiamo gli elementi sulla prima parallela al disotto per le stesse quantità; sostituiamo x con $\frac{x}{\sqrt{\alpha}}$, dividiamo gli elementi del determinante per $\sqrt{\alpha}$, e procediamo al limite per $\alpha \to \infty$. Si ottiene

$$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha^{-\frac{n}{2}}R_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}G_n(x\sqrt{2}). \tag{13}$$

(4) E. Toscano, *Su alcuni polinomi che al limite si riducono a quelli di Hermite e di P. Humbert*, « Le Matematiche », (VIII), 59-72, (1953).

(5) N. Nielsen, *Recherches sur les polynomes d'Hermite*, « Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab- Mathematisk/fysiske Meddelelser », I/6, 1918.

Le (10), (11), (12), (13), con le note

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha^{-\frac{n}{2}} L_n^{(\alpha)}(\alpha - x\sqrt{\alpha}) = \frac{1}{n!} H_n(x)$$

$$\lim_{\alpha \to \infty} \alpha^{-\frac{n}{2}} P_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{n!} H_n(x\sqrt{2}),$$

consentono di passare direttamente dalle riportate formule di riduzione all'altra nota

$$h_n(x) = H_n(x)h_0(x) - e^{\frac{x^2}{2}} G_{n-1}(x).$$