BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PETER SCHERK

Intorno alle curve sferiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.1, p. 38–40.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_1_38_0>

Intorno alle curve sferiche.

Nota di PETER SCHERK (a Saskatoon, Canadà),
da una lettera al prof. B. SEGRE.

Sunto. - *Si riottengono in modo assai semplice alcuni risultati di* W. SCHERRER, B. SEGRE, D. GALLARATI.

... Denotiamo con $\mathfrak{F}$ una superficie con derivate terze continue dell'ordinario spazio euclideo, e con

$$\mathfrak{L}: \qquad \rho = \rho(s)$$

una curva di $\mathfrak{F}$ con derivate terze continue rispetto all' arco s, la cui curvatura $\varkappa$ non si annulli mai. Siano inoltre ξ_1, ξ_2, ξ_3 e τ il triedro mobile e la torsione di $\mathfrak{L}$, talchè l'imagine sferica delle binormali di $\mathfrak{L}$

$$\tilde{\mathfrak{L}}: \qquad \xi_3 = \xi_3(s)$$

avrà l'elemento lineare $d\tilde{s} = \tau ds$. Introdotto infine il luogo

$$\mathfrak{L}^*: \qquad \rho^*(s) = \rho(s) + \frac{1}{\varkappa}\xi_2(s)$$

dei centri di curvatura di $\mathfrak{L}$, risulterà

$$\frac{d\rho^*}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\xi_2 + \frac{\tau}{\varkappa}\xi_3,$$

onde avrà l' elemento lineare $ds^* = \sqrt{\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\right)^2 + \frac{\tau^2}{\varkappa^2}}\, ds.$

Una parte del teor. II di GALLARATI [Rend. Acc. Naz. Lincei, (8) 13 (1952)$_2$, 238–241] afferma che, fissato $R > 0$, se per ogni $\mathfrak{L}$ di $\mathfrak{F}$ risulta

$$ds^* = R d\tilde{s}, \tag{1}$$

allora $\mathfrak{F}$ è una sfera di raggio R. Ora la (1) equivale ovviamente alla

$$\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\right)^2 + \frac{\tau^2}{\varkappa^2} = R^2\tau^2; \tag{2}$$

e questa è la ben nota equazione differenziale per curve giacenti su di una sfera di raggio R. Pertanto la (1) sussiste se, e soltanto se, ogni $\mathfrak{L}$ appartiene ad una sfera di raggio R: e ciò fornisce non soltanto la parte citata del teorema di GALLARATI, ma anche l' inversa.

Supponiamo ora che $\mathfrak{F}$ sia una sfera di raggio R di centro l'origine O; si può in tal caso assumere $\rho = R\xi$, ove $\xi^2 = 1$ e quindi $\xi\xi_1 = 0$. L' angolo α fra ξ e ξ_2 può venir misurato in guisa che risulti $\xi\xi_3 = -$ sen α, onde si avrà

$$\xi = \cos\alpha \cdot \xi_2 - \operatorname{sen}\alpha \cdot \xi_3 \,. \tag{3}$$

Derivando ambo i membri della (3) rispetto ad s, otteniamo:

$$-\varkappa\cos\alpha = \frac{1}{R}, \qquad \tau = \alpha'; \tag{4}$$

e poichè

$$\rho^* = \rho + \frac{1}{\varkappa}\xi_2 = -R\operatorname{sen}\alpha \cdot \xi_3\,, \tag{5}$$

così la proiezione di $\mathfrak{L}^*$ da O sulla sfera unitaria non differisce da $\tilde{\mathfrak{L}}$. Questo, essenzialmente, è il teor. I di GALLARATI. Inoltre, dalle (5), (4) si trae:

$$\frac{d\rho^*}{ds} = -R\cos\alpha \cdot \alpha' \cdot \xi_3 + R\tau\operatorname{sen}\alpha \cdot \xi_2 = R\alpha'(\operatorname{sen}\alpha \cdot \xi_2 - \cos\alpha \cdot \xi_3);$$

pertanto $\mathfrak{L}^*$ ha l' elemento lineare $ds^* = R\alpha' ds = R\tau ds = R d\tilde{s}$, onde si ottiene ancora a (1 e quindi la seconda parte del teor. II di GALLARATI.

Se $\mathfrak{L}$ è una curva chiusa, di lunghezza L, dalle (4) si trae:

$$\oint_{\mathfrak{L}} \frac{\tau}{\varkappa}\, ds = -R \oint \alpha' \cos\alpha \, ds = -R \operatorname{sen} \alpha(s) \Big|_{s=s_0}^{s=s_0+L} = 0.$$

E questa è la parte più agevole del teorema da Lei dimostrato [B. SEGRE, Rend. Acc. Naz. Lincei, (8) 3 $(1947)_2$, 420-422]. Parimenti, se $f(t)$ denota una qualunque funzione integrabile di un parametro t, definita nell'intervallo $-1 \leq t \leq 1$, risulta:

$$\oint_{\mathfrak{L}} f(\operatorname{sen}\alpha) \frac{\tau}{\varkappa}\, ds = 0.$$

Così, ad esempio, si ha

$$\oint_{\mathfrak{L}} \frac{\tau ds}{\varkappa^{2n+1}} = 0.$$

Notiamo infine che:

$$\oint_{\mathfrak{L}} \tau ds \equiv \oint_{\mathfrak{L}} \alpha' ds = \alpha(s_0 + L) - \alpha(s_0) \equiv 0 \pmod{2\pi}. \tag{6}$$

D'altronde, in virtù delle nostre ipotesi e della prima delle (4), $\cos\alpha$ non si annulla mai, sicchè α deve restare in due quadranti adiacenti e la (6) fornisce il risultato $\oint \tau ds = 0$, dovuto a W. SCHERRER [Viert. d. nat. Ges. Zürich, 85 (1940), Bleiblatt. 32, pp. 40-46]. Sarebbe interessante indagare se questo risultato si conserva valido quando si permetta a $\rho''(s)$ di diventare infinita in punti isolati ove $1/\varkappa$ e ξ_2 rimangano continui ...