Bollettino Unione Matematica Italiana

Davide Carlo Demaria

Invarianti affini di elementi curvilinei.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.1, p. 40–45.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_1_40_0>

Invarianti affini di elementi curvilinei.

Nota di DAVIDE CARLO DEMARIA (a Torino).

Sunto. - Si ricercano gli invarianti affini di elementi curvilinei nei 3 seguenti casi: coppia di E_3 piani, coppia e terna di E_2 sghembi; e di essi si dà pure una caratterizzazione affine.

1. Invarianti affini di una coppia di E_3 piani.

A tali invarianti è già stato dedicato un lavoro di SANTALÒ [1]

[1] L. A. SANTALÒ, *Affine Invariants of Certain Pairs of Curves and Surfaces*, in Duke Math. Journal, Vol. 14, 3 - 1947.

che però considera solo i due casi particolari: E_3 aventi in comune il centro oppure la retta tangente.

Siano P_1 e P_2 i centri dei due E_3 appartenenti rispettivamente alle curve C_1 e C_2, e sia O il punto d' incontro delle due rette tangenti t_1, t_2 a quelle curve nei suddetti punti, possiamo riferire i due E_3 al seguente sistema di coordinate cartesiane:

$$O \equiv \text{origine degli assi}; \quad OP_1 \equiv \text{asse } x; \quad OP_2 \equiv \text{asse } y$$

In tal modo, chiamando con h, k rispettivamente le distanze OP_1, OP_2; avremo per i due E_3 le seguenti espressioni:

$$\text{(1)} \qquad \begin{array}{ll} C_1 & y = a_2(x-h)^2 + a_3(x-h)^3 + [4] \\ C_2 & x = b_2(y-k)^2 + b_3(y-k)^3 + [4] \end{array}$$

La più generale affinità che lascia invariati i due E_1 di centri P_1 e P_2 è:

$$x = \frac{h}{H} X; \quad y = \frac{k}{K} Y$$

essa muta le (1) in equazioni di egual tipo, dove in luogo di a_2, a_3, ecc. compaiono i coefficienti A_2, A_3, B_2, B_3 dati da:

$$A_2 = \frac{Kh^2}{H^2k} a_2; \quad A_3 = \frac{Kh^3}{H^3k} a_3; \quad B_2 = \frac{Hk^2}{K^2h} b_2; \quad B_3 = \frac{Hk^3}{K^3h} b_3$$

ne segue l'esistenza dei quattro invarianti affini indipendenti:

$$i_1 = \frac{a_2h^2}{k}; \quad i_2 = \frac{b_2k^2}{h}; \quad i_3 = \frac{a_3{}^2k}{a_2{}^3}; \quad i_4 = \frac{b_3{}^2h}{b_2{}^3}$$

Osserviamo che i_1 e i_2 dipendono solamente da un E_1 e un E_2 e che i_3 e i_4 solo da un E_1 e un E_3.

Supponendo inoltre che i centri degli E_3 siano coincidenti ($P_1 \equiv P_2 \equiv 0$) si trovano i due invarianti affini indipendenti (²):

$$I_1 = \frac{i_3^{\frac{3}{2}}}{i_1^{\frac{1}{2}} i_2} = \frac{a_3{}^3}{b_2 a_2{}^5}; \quad I_2 = \frac{i_4^{\frac{3}{2}}}{i_1 i_2^{\frac{1}{2}}} = \frac{b_3{}^3}{a_2 b_2{}^5}$$

2. Caratterizzazione affine degli invarianti.

Consideriamo la conica γ passante per l'E_2 di C_1 e per l'E_1 di C_2:

$$\frac{1}{a_2h^3} yx - \left(\frac{x}{h} + \frac{y}{k} - 1\right)^2 = 0$$

(²) Questo caso è già stato esaminato dal SANTALO, l. c. N. 1. Nell'articolo l'A. dà pure una caratterizzazione metrica e affine di I_1 e I_2.

Segando questa conica con la retta $x = h$, oltre a P_1 otteniamo il punto $H \equiv \left(h, \frac{k^2}{a_2 h^2}\right)$; pertanto se $K \equiv (h, k)$, abbiamo che:

$$(P_1, H, K) = \frac{a_2 h^2}{k} = i_1$$

Allo stesso modo si caratterizza i_2.

Notiamo pure che l'invariante $J = i_1/i_2$ è il ben noto invariante proiettivo (3).

Per caratterizzare i_3 consideriamo la parabola osculatrice all'E_3 di C_1:

$$y = a_2(x-h)^2 + \frac{a_3}{a_2}(x-h)y + \frac{a_3^2}{4a_2^3} y^2$$

tagliandola con $x = h$, si trova P_1 e $L \equiv \left(h, \frac{4a_2^3}{a_3^2}\right)$; e il rapporto semplice (P_1, L, K) vale:

$$(P_1, L, K) = \frac{a_3^2 k}{4a_2^3} = \frac{1}{4} i_3$$

3. Invarianti affini di una coppia di E_2 nello spazio.

Siano P_1 e P_2 i centri dei due E_2, t_1 e t_2 le rette tangenti, α_1 e α_2 i piani osculatori (supposti non paralleli) rispettivamente nei punti P_1 e P_2; si può adottare il seguente sistema di riferimento:

asse $z \equiv$ intersezione di α_1 e α_2;

$O \equiv$ punto medio del segmento $2j$ che t_1 e t_2 intercettano sull'asse z;

asse x parallelo a t_1;

asse y parallelo a t_2.

Inoltre se h, k sono le distanze di P_1 e P_2 dall'asse z; i due E_2 si lasciano così rappresentare:

$$(2) \qquad C_1 \begin{cases} y = & [3] \\ z - j = a_2(x-h)^2 + [3] \end{cases} \qquad C_2 \begin{cases} x = & [3] \\ z + j = b_2(y-k)^2 + [3] \end{cases}$$

(3) Infatti, assumendo λ, come coordinata proiettiva nel fascio:

$$\lambda xy = \left(\frac{x}{h} + \frac{y}{k} - 1\right)^2. \qquad J = \left(\frac{1}{b_2 k^3}, \frac{1}{a_2 h^3}, 0, \infty\right) = \frac{a_2 b^3}{h_2 k^3} = \frac{i_1}{i_2}.$$

L'affinità che lascia immutati gli E_1 di centri P_1 e P_2 è:

$$x = \frac{h}{H} X; \quad y = \frac{k}{K} Y; \quad z = \frac{j}{J} Z \tag{3}$$

Essa muta le (2) in nuove equazioni dello stesso tipo, dove in luogo di a_2, b_2, compaiono i coefficienti A_2, B_2:

$$A_2 = \frac{Jh^2}{H^2 j} a^2; \quad B_2 = \frac{Jk^2}{K^2 j} b_2$$

da cui risulta l'esistenza di due invarianti affini indipendenti:

$$i_1 = \frac{a_2 h^2}{j}; \quad i_2 = \frac{b_2 k^2}{j}$$

Per caratterizzare i_1 consideriamo nel piano $y = o$, la conica ω passante per l'E_2 di C_1, per O e avente in O l'asse z come retta tangente:

$$\frac{j^2}{a_2 h} x(z - j) = (hz - jx)^2$$

I due punti d'intersezione della ω con l'asse x: $O(o, o, o)$, $Q_1\left(-\frac{j}{a_2 h}, o, o\right)$, e il punto $H(h, o, o)$ son tali che il rapporto semplice (O, Q_1, H) vale:

$$(O, Q_1, H) = -\frac{a_2 h^2}{j} = -i_1 .$$

4. Invarianti affini di una terna di E_2 sghembi.

Tali invarianti sono già stati considerati in un lavoro di R. Cherep (4) che contiene però alcune inesattezze, su cui ci riserviamo di tornare più avanti; per intanto procediamo diversamente.

Siano P_1, P_2, P_3 i centri dei 3 E_2, e t_1, t_2, t_3, le rispettive tangenti, introduciamo un sistema di coordinate cartesiane, assumendo come piani xy, yz, zx rispettivamente i piani P_1t_2, P_2t_3, P_3t_1; dal che (dette h, k, j rispettivamente le distanze OP_1, OP_2, OP_3) si ha per le tre curve C_1, C_2, C_3, cui appartengono gli E_2

(4) R. Cherep, *Invariantes afines de ciertas ternas de curvas en el espacio*, « Gazeta de Matematica », N. 50, Dezembro de 1951, Lisboa.

la seguente rappresentazione analitica:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &C_1 \begin{cases} y = & a_2(x-h)^2 + [3] \\ z = b_1(x-h) + & b_2(x-h)^2 + [3] \end{cases} \\ &C_2 \begin{cases} z = & d_2(y-k)^2 + [3] \\ x = c_1(y-k) + & c_2(y-k)^2 + [3] \end{cases} \\ &C_3 \begin{cases} x = & e_2(z-j)^2 + [3] \\ y = f_1(z-j) + & f_2(z-j)^2 + [3] \end{cases} \end{aligned}$$

La trasformazione affine che lascia invariati gli E_1 è la (3); di qui ragionando come nei casi precedenti si perviene agli invarianti affini:

$$i_1 = b_1\frac{h}{j}; \quad i_2 = c_1\frac{k}{h}; \quad i_3 = f_1\frac{j}{k}$$

$$i_4 = \frac{a_2 b_1 h}{b_2 k}; \quad i_5 = \frac{d_2 c_1 k}{c_2 j}; \quad i_6 = \frac{e_2 f_1 j}{f_2 h}$$

$$i_7 = \frac{a_2 h^2}{k}; \quad i_8 = \frac{d_2 k^2}{j}; \quad i_9 = \frac{e_2 j^2}{h}$$

Si noti che i_1, i_2, i_3 dipendono solo dagli E_1, i_4, i_5, i_6 solo dagli E_1 e da un piano osculatore.

5. Caratterizzazione affine degli invarianti.

1°) i_1, i_2, i_3.

Consideriamo il punto Q_1 d'intersezione tra l'asse z e la tangente t_1: $Q_1(o, o, -hb_1)$; il rapporto tra i segmenti OQ_1, OP_3 vale pertanto: $\frac{OQ_1}{OP_3} = -\frac{hb_1}{j} = -i_1$; in tal modo si ha pure una caratterizzazione metrica.

2°) i_4, i_5, i_6.

Il piano osculatore α_1 alla curva C_1 in P_1 ha l'equazione:

$$\begin{vmatrix} x-h & y & z \\ 1 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Il punto d'intersezione R_1 tra il piano osculatore e l'asse y è: $R_1\left(o, \frac{a_2 b_1}{b_2}h, o\right)$; pertanto il rapporto tra i segmenti OR_1 e OP_1 è $\frac{OR_1}{OP_2} = \frac{a_2 b_1 h}{b_2 k} = i_4$.

3°) i_7, i_8, i_9.

Consideriamo sul piano $z = 0$ la curva C_1', proiezione parallela rispetto all'asse z di C_1, essa ha l'equazione:

$$C_1' \quad y = a_2(x-h)^2 + [3].$$

Operando come nel n. 2, (ora, però, la conica deve passare per l'E_2 di C_1', per P_2 ed avere in P_2 come retta tangente l'asse x), si ha immediatamente una caratterizzazione affine di i_7.

6. Nel già citato lavoro di CHEREP la determinazione degli invarianti viene fatta, adottando un altro sistema di riferimento e precisamente, assumendo come origine l'intersezione dei tre piani osculatori α_1, α_2, α_3; e come assi x, y, z rispettivamente le rette OP_1, OP_2, OP_3.

Osserviamo, incidentalmente, che detto sistema, in quanto vincolato ai piani osculatori, non è atto a rivelare l'esistenza, da noi già provata, di invarianti affini dipendenti dai soli E_1.

Per i 3 E_2 CHEREP dà una rappresentazione del tipo (4) con l'aggiunta nella prima equazione di ciascuna coppia, rispettiva; mente dei termini del 1° ordine: $a_1'x - h)$; $d_1(y-k)$; $e_1(z-j)$ - senza però tener conto che i piani osculatori devono passare per l'origine, il che conduce alle seguenti condizioni:

$$a_1b_2 = a_2b_1 ; \quad c_1d_2 = c_2d_1 ; \quad e_1f_2 = e_2f_1 . \tag{5}$$

Pertanto dei seguenti nove invarianti affini da lei trovati:

$$I_1 = a_1c_1 ; \quad I_2 = b_1e_1 ; \quad I_3 = d_1f_1$$

$$I_4 = \frac{b_1c_2}{d_2} ; \quad I_5 = \frac{a_1e_2}{f_2} ; \quad I_6 = \frac{d_1a_2}{b_2}$$

$$I_7 = \frac{a_2{}^2c_2}{b_2{}^2e_2} ; \quad I_8 = \frac{d_2{}^2f_2}{c_2{}^2a_2} ; \quad I_9 = \frac{e_2{}^2b_2}{f_2{}^2d_2}$$

per le (5) solo più sei sono indipendenti, p. es.:

$$I_1, \ I_2, \ I_3, \ I_5, \ I_7, \ I_8$$

in quanto si ha:

$$I_4 = \frac{I_1I_2}{I_3I_5} ; \quad I_6 = \frac{I_3I_5}{I_2} ; \quad I_9 = \frac{I_5{}^2I_3}{I_1I_2I_7I_8} .$$

A questi sei invarianti se ne devono però aggiungere altri tre, da cui h, k, j non son più eliminabili, che sono stati implicitámente trascurati da CHEREP.