Bollettino Unione Matematica Italiana

Paolo Salmon

Sulla postulazione di una curva semplice dello spazio S_r.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.1, p. 46–50.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_1_46_0>

Sulla postulazione di una curva semplice dello spazio S_r.

Nota di Paolo Salmon (a Roma)

Sunto. - *È noto che la postulazione di una curva dello spazio* $\mathrm{S_r}$ *rispetto alle ipersuperficie di ordine* m *che debbono contenerla è data da una formula del tipo* $\mathrm{mh+k}$, *quando* m *sia sufficientemente grande. Se la curva è irriducibile e priva di punti multipli si possono esprimere le costanti* h *e* k *in funzione dell'ordine e del genere della curva* (1). *Se la curva, sempre supposta irriducibile e priva di singolarità, viene invece imposta alle forme di ordine* m *di* $\mathrm{S_r}$ *con una certa molteplicità* $\mathrm{i} \geq 2$, *le costanti* h *e* k *si esplicitano mediante l'ordine, il genere, la dimensione dello spazio ambiente e l'intero* i (2).

Mi propongo qui di ritrovare con procedimento algebrico di carattere elementare, estendibile probabilmente a casi più complicati, la postulazione di una curva semplice, eventualmente spezzata, esplicitando la costante h *(ma non la costante* k*) che ivi compare.*

1. Sia data nello spazio S_r una curva C^n semplice di ordine n; e sia $\overline{C}^n$ la sua proiezione effettuata da un S_{r-3} generico di S_r su di un piano π sghembo con l'S_{r-3}. Introduciamo nello spazio S_r un sistema di riferimento omogeneo ponendo i vertici A_0, A_1, A_2 sul piano π ed i vertici rimanenti sullo spazio S_{r-3}. Denotiamo con y_0, y_1, ..., y_r le coordinate di un punto di S_r, e per maggior chiarezza chiamiamo x_0, x_1, x_2 anzichè y_0, y_1, y_2 le coordinate variabili di un punto del piano π.

Se allora l'equazione della curva $\overline{C}^n$ è $f(x_0, x_1, x_2) = 0$, le equazioni di C^n si scrivono nel modo seguente:

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
y_0 &= x_0\psi(x_0, x_1, x_2) \\
y_1 &= x_2\psi(x_0, x_1, x_2) \\
y_2 &= x_2\psi(x_0, x_1, x_2) \\
y_3 &= \varphi_3(x_0, x_1, x_2) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_r &= \varphi_r(x_0, x_1, x_2) \\
f(x_0&, x_1, x_2) = 0
\end{aligned}
$$

(1) Castelnuovo, *Sui multipli di una serie lineare di gruppi di punti*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 1893.

(2) B. Segre, *The postulation of a multiple curve*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 1942, Vol. 38, Parte 4ª.

ove ψ e $\varphi_i[i = 3, 4, \ldots, r]$ sono forme nelle x_0, x_1, x_2, di gradi rispettivi $\rho - 1$ e ρ, la prima delle quali è prima con la f.

Vogliamo determinare il numero θ_m delle condizioni imposte alle ipersuperficie di S, d'un certo ordine m dal passaggio per C^n.

Indichiamo il sistema lineare di tutte le ipersuperficie d'ordine m di S_r nel seguente modo:

$$Y_m + (y_3 Y^3{}_{m-1} + y_4 Y^4{}_{m-1} + \ldots + y_r Y^r{}_{m-1}) + \ldots = 0$$

dove abbiamo ordinato il polinomio del primo membro secondo le potenze decrescenti delle variabili y_3, $y_4, \ldots, y_r$; onde Y_m ed $Y^i{}_{m-1}(i = 3, 4, \ldots, r)$ sono polinomi omogenei completi a coefficienti indeterminati di grado rispettivamente m ed $m - 1$ nelle variabili y_0, y_1, y_2, ecc. Indichiamo poi con X_m, $X^i{}_{m-1}$ i polinomi che si ottengono rispettivamente dai polinomi Y_m, $Y^i{}_{m-1}$ ponendo x_0, x_1, x_2 in luogo di y_0, y_1, y_2; e con $X'_{m\rho-n}$ un nuovo polinomio omogeneo completo a coefficienti indeterminati, di grado $m\rho - n$, nelle x_0, x_1, x_2.

Allora, tenuto conto delle (1), il nostro problema consiste nel ricercare il numero θ_m delle condizioni da imporre alle curve del sistema

$$(2) \quad \Sigma_s : \psi^m X_m + \psi^{m-1}(\varphi_3 X^3{}_{m-1} + \varphi_4 X^4{}_{m-1} + \ldots + \varphi_r X^r{}_{m-1}) + \ldots = 0$$

affinchè appartengano al sistema

$$(3) \qquad \Sigma_t : f X'_{m\rho-n} = 0 .$$

2. Conviene ora fare alcune considerazioni inerenti a sistemi lineari di ipersuperficie dello stesso ordine, e stabilire in proposito una relazione che ci sarà utile nel seguito.

Siano Σ_h, Σ_j e Σ_t tre sistemi lineari di ipersuperficie dello stesso ordine di uno spazio S_d, di dimensione h, j e t rispettivamente. Σ_{s_1} sia il sistema congiungente Σ_h, Σ_j e Σ_t; Σ_s e Σ_{s_2} siano i sistemi congiungenti rispettivamente Σ_h e Σ_t con Σ_j.

Indichiamo con θ e $\bar{\theta}$ il numero delle condizioni da imporre rispettivamente alle forme dei sistemi Σ_s e Σ_j affinchè appartengano al sistema Σ_t; e con l indichiamo il numero di condizioni da imporre alle forme del sistema Σ_h affinchè appartengano al sistema Σ_{s_2}.

Valgono manifestamente le relazioni:

$$\theta + t = s_1$$

$$s_2 = \bar{\theta} + t$$

$$s_1 = s_2 + l$$

sommando le quali membro a membro si ottiene la

$$\theta = \bar{\theta} + l. \tag{4}$$

3. Ritorniamo ora al nostro problema, ed osserviamo che il sistema (2) può riguardarsi come quello congiungente i sistemi

$$\Sigma_h : \psi^{m-1}(\varphi_3 X^3{}_{m-1} + \varphi_4 X^4{}_{m-1} + \dots + \varphi_r X^r{}_{m-1}) + \dots = 0 \tag{5}$$

e

$$\Sigma_j : \psi^m X_m = 0. \tag{6}$$

Indichiamo poi con $\bar{\theta}_m$ il numero di condizioni da imporre alle forme del sistema (6) affinchè appartengono al sistema (3), e con l_m il numero delle condizioni da imporre alle forme del sistema (5) affinchè appartengano al sistema

$$\Sigma_{s_2} : \psi^m X_m + X'_{m\rho - n} = 0. \tag{7}$$

L'identità (4) del numero precedente, fornisce allora:

$$\theta_m = \bar{\theta}_m + l_m. \tag{8}$$

Poichè ψ è primo con f, si ha manifestamente:

$$\bar{\theta}_m = \binom{m+2}{2} - \binom{m-n+2}{2}$$

quando si convenga di riguardare come nulla l'espressione $\binom{m-n+2}{2}$ per $m < n-2$. Per $m \geq n-2$ risulta quindi:

$$\bar{\theta}_m = mn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1. \tag{9}$$

Osserviamo ora che l_m uguaglia il massimo numero di curve linearmente indipendenti del sistema (5) che individuano un sistema non avente curve comuni col sistema (7). Ricaveremo da ciò che *l'espressione* $l_m = \theta_m - \bar{\theta}_m$ *è una funzione non decrescente di* m.

Siano invero $f_1 = 0, \dots, f_{l_m} = 0$ l_m curve linearmente indipendenti del sistema (5) e tali che nessuna combinazione lineare d'esse appartenga al sistema (7). Segue allora che $\alpha\psi f_1 = 0, \dots$, $\alpha\psi f_{l_m} = 0$ (dove $\alpha = 0$ è l'equazione di una retta non passante per le intersezioni di $\psi = 0$ ed $f = 0$) sono l_m curve linearmente indipendenti del sistema $\psi^m(\varphi_3 X_m{}^3 + \dots + \varphi_r X_m{}^r) + \dots = 0$; proveremo che nessuna combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli di esse appartiene al sistema $\psi^{m+1} X_{m+1} + f X'_{(m+1)\rho - n} = 0$, onde seguirà subito l'asserto. Se infatti fosse $\lambda_1\alpha\psi f_1 + ... + \lambda_{l_m}\alpha\psi f_{l_m} = 0$ mod (ψ^{m+1}, f), seguirebbe $\alpha(\lambda_1 f_1 + ... + \lambda_{l_m} f_{l_m}) = 0$ mod (ψ^m, f) e da questa $\lambda_1 f_1 + ... \lambda_{l_m} f_{l_m} = 0$ mod (ψ^m, f) ([3]), sicchè le λ_i dovrebbero essere tutte nulle in virtù dell'ipotesi fatta sulle $f_i\,[i = 1, 2 ..., l_m]$.

Sia ora q il numero delle parti irriducibili della curva C^n, aventi gli ordini $n_1, ..., n_q$ con $n_1 + ... + n_q = n$. Il numero θ_m non può manifestamente superare il numero $(mn_1 + 1) + ... + (mn_q + 1) = mn + q$, poichè una ipersuperficie di ordine m passante per $mn_i + 1$ punti comunque scelti su di una curva irriducibile d'ordine n_i, necessariamente contiene questa per intero.

Ricordando allora la (9) si ha, per $m \geq n - 2$:

$$\theta_m - \bar{\theta}_m \leq mn + q - mn + \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 = q + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1.$$

La funzione $\theta_m - \bar{\theta}_m$ *non può dunque superare un certo limite indipendente da* m; *e poichè essa non è decrescente, a partire da un intero* m_0 *sufficientemente alto diventa costante.* Si ha cioè:

$$\theta_m - \bar{\theta}_m = c \text{ (costante) per } m \geq m_0,$$

([3]) Qui si applica il noto teorema: Sia $\alpha = 0$ l'equazione di una retta non passante per le intersezioni di due curve piane $h_1 = 0$ ed $h_2 = 0$, e $h = 0$ denoti l'equazione di una curva piana qualsiasi. Se, in queste ipotesi vale la relazione: $\alpha h = 0$ mod (h_1, h_2), vale anche l'altra: $h = 0$ mod (h_1, h_2).

Si scelga infatti un opportuno riferimento per cui la retta $\alpha = 0$ coincida con la retta fondamentale $x_0 = 0$. Dalla relazione

(a) $x_0 h = Ah_1 + Bh_2$ segue, secando con la retta $x_0 = 0$:

$A(0, x_1, x_2)h_1(0, x_1, x_2) + B(0, x_1, x_2)h_2(0, x_1, x_2) = 0$, da cui:

$A(0, x_1, x_2) = L(0, x_1, x_2)h_2(0, x_1, x_2)$ e

$B(0, x_1, x_2) = - L(0, x_1, x_2)h_1(0, x_1, x_2)$,

in quanto $h_1(0, x_1, x_2)$ ed $h_2(0, x_1, x_2)$ sono primi tra loro in forza dell'ipotesi che la retta $\alpha = 0$ non contenga alcun punto comune alle curve $h_1 = 0$, $h_2 = 0$. Allora:

$A(x_0, x_1, x_2) = L(0, x_1, x_2)h_2(x_0, x_1, x_2) + x_0 A'(x_0, x_1, x_2)$ e

$B(x_0, x_1, x_2) = - L(0, x_1, x_2)h_1(x_0, x_1, x_2) + x_0 B'(x_0, x_1, x_2)$

e sostituendo le espressioni ora ottenute nella (a):

$$x_0 h = x_0 A'h_1 + x_0 B'h_2, \text{ cioè } h = A'h_1 + B'h_2 \qquad \text{c. v. d.}$$

ed infine, per la (9):

$$\theta_m = mn - \frac{(n-1)(n-2)}{2} + c + 1. \tag{10}$$

Dalla (10) segue subito che la costante c non dipende dal sistema di riferimento prescelto. Infatti tanto θ_m quanto l'ordine n di C^n sono caratteri indipendenti dal sistema di riferimento.

La (10) *fornisce la richiesta postulazione della curva* C^n.