Bollettino Unione Matematica Italiana

Tino Zeuli

Problemi relativi al moto di un punto su una sfera riferita a coordinate ellittiche sferiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.1, p. 50–54.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_1_50_0>

Problemi relativi al moto di un punto su una sfera riferita a coordinate ellittiche sferiche.

Nota di TINO ZEULI (a Torino).

Sunto. - *Riferita la sfera a coordinate ellittiche sferiche e rilevata la corrispondente espressione dell'elemento lineare, si studia su essa il moto di un punto soggetto a forza conservativa e si mette in evidenza un caso particolare notevole.*

Essendo A e B due punti fissi di una sfera, per determinare la posizione di un punto generico P che si trova su una determinata semisfera delimitata dal cerchio massimo per A e B basta dare le lunghezze degli archi di cerchio massimo, $r = \widehat{AP}$, $r' = \widehat{BP}$ (coordinate bipolari o dipolari di P, sulla sfera, rispetto ai poli A, B). Ponendo poi.

$$r + r' = 2\mu, \qquad r - r' = 2\nu,$$

si dice che μ e ν sono le *coordinate ellittiche* di P, rispetto ai poli A, B, sulla semisfera: e se $2c$ è la lunghezza dell'arco $\widehat{AB}$ risultano $\mu > c$ e $|\nu| < c$. Dati μ e ν sono noti r ed r' e quindi la posizione di P avendosi

$$r = \mu + \nu, \qquad r' = \mu - \nu.$$

Se θ e φ sono «colatitudine» e «longitudine» di P sulla sfera (che, per semplicità, supporremo di raggio 1), scelte in modo che siano $\theta_A = \theta_B = \frac{\pi}{2}$ e $\varphi_A = 0$, $\varphi_B = 2c$, per una nota formula di trigonometria sferica si ha subito

$$\cos(\mu+\nu)=\cos\varphi\sin\theta,\qquad \cos(\mu-\nu)=\cos(2c-\varphi)\sin\theta,$$

da cui seguono le relazioni

$$\sin^2\theta=\frac{\cos^2(\mu-\nu)+\cos^2(\mu+\nu)-2\cos 2c\cos(\mu+\nu)\cos(\mu-\nu)}{\sin^2 2c},$$

$$\frac{\cos(\mu-\nu)}{\cos(\mu+\nu)}=\frac{\cos(2c-\varphi)}{\cos\varphi}.$$

E per il quadrato dell'elemento lineare della sfera

$$ds^2=d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2,$$

scrivendolo nella forma

$$\sin^2\theta\cos^2\theta\, ds^2=\sin^2\theta\cos^2\theta\, d\theta^2+\cos^2\theta\sin^4\theta\, d\varphi^2,$$

e servendosi delle formule sopra scritte e di quelle che da esse si ottengono per differenziazione, si giunge all'espressione del ds^2 della sfera nelle coordinate ellittiche μ, ν:

$$ds^2=(\cos 2\mu-\cos 2\nu)\left(\frac{d\mu^2}{\cos 2\mu-\cos 2c}+\frac{d\nu^2}{\cos 2c-\cos 2\nu}\right)\tag{1}$$

(che, fra l'altro, mette in evidenza che le linee $\mu=$ cost e $\nu=$ cost. sulla sfera formano un doppio sistema ortogonale).

Ciò premesso consideriamo sulla sfera il moto di un punto di massa unitaria soggetto ad una forza conservativa di potenziale U.

In virtù della (1) si avrà in coordinate ellittiche sferiche

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}(\cos 2\mu-\cos 2\nu)\left(\frac{\dot\mu^2}{\cos 2\mu-\cos 2c}+\frac{\dot\nu^2}{\cos 2c-\cos 2\nu}\right)$$

e sussiste delle equazioni del moto l'integrale delle forze vive

$$H\equiv T-U=h\qquad (=\text{costante}),$$

e l'equazione di JACOBI per il moto del punto P sulla sfera:

$$H\left(\mu,\nu,\frac{\partial W}{\partial\mu},\frac{\partial W}{\partial\nu}\right)=h$$

risulta

$$\frac{1}{2(\cos 2\mu-\cos 2\nu)}\left[(\cos 2\mu-\cos 2c)\left(\frac{\partial W}{\partial\mu}\right)^2+\right.$$
$$\left.+(\cos 2c-\cos 2\nu)\left(\frac{\partial W}{\partial\nu}\right)^2\right]-U=h.\tag{2}$$

Se il potenziale U è della forma

$$U = \frac{f(\mu) - g(\nu)}{\cos 2\mu - \cos 2\nu} \tag{3}$$

con $f(\mu)$ funzione della sola μ, e $g(\nu)$ funzione della sola ν, l'equazione (2) si integra per separazione di variabili.

Infatti in questo caso si può scrivere

$$\begin{aligned}(\cos 2\mu - \cos 2c)\left(\frac{\partial W}{\partial \mu}\right)^2 + (\cos 2c - \cos 2\nu)\left(\frac{\partial W}{\partial \nu}\right)^2 - \\ - 2[f(\mu) - g(\nu)] = 2h(\cos 2\mu - \cos 2\nu)\end{aligned} \tag{4}$$

la quale si può soddisfare ponendo

$$W = W_1(\mu) + W_2(\nu)$$

con W_1 funzione della sola μ e W_2 funzione della sola ν.

Sostituendo si ha

$$\begin{aligned}(\cos 2\mu - \cos 2c)\left(\frac{dW_1}{d\mu}\right)^2 - 2f(\mu) - 2h \cos 2\mu = \\ = (\cos 2\nu - \cos 2c)\left(\frac{dW_2}{d\nu}\right)^2 - 2g(\nu) - 2h \cos 2\nu\end{aligned}$$

ove il primo membro è funzione della sola μ ed il secondo membro funzione della sola ν. Affinchè l'eguaglianza sussista bisogna che ambo i membri siano costanti: chiamando 2α questa costante avremo

$$\left(\frac{dW_1}{d\mu}\right)^2 = \frac{2[f(\mu) + h \cos 2\mu + \alpha]}{\cos 2\mu - \cos 2c}, \qquad \left(\frac{dW_2}{d\nu}\right)^2 = \frac{2[g(\nu) + h \cos 2\nu + \alpha]}{\cos 2\nu - \cos 2c}$$

e prenderemo

$$W_1 = \int_a^\mu \sqrt{\frac{2[f(\mu) + h \cos 2\mu + \alpha]}{\cos 2\mu - \cos 2c}}\, d\mu,$$

$$W_2 = \int_\nu^a \sqrt{\frac{2[g(\nu) + h \cos 2\nu + \alpha]}{\cos 2\nu - \cos 2c}}\, d\nu$$

e

$$W = W_1 + W_2 .$$

La funzione W contiene, oltre h, la costante arbitraria non additiva α e pertanto è un'integrale completo dell'equazione di JACOBI (4).

Nel caso particolare in cui $g(\nu) = f(\nu)$, l'espressione precedente porge

$$W = \int_{\nu}^{\mu} \sqrt{\frac{2[f(s) + h \cos 2s + \alpha]}{\cos 2s - \cos 2c}}\, ds.$$

Questo caso si presenta, per esempio, quando il punto P è attratto dal punto A con una forza derivante dal potenziale

$$U = k \operatorname{ctg} r = k \frac{2 \cos r \cdot \sin r'}{2 \sin r \cdot \sin r'} = k \frac{\sin 2\nu - \sin 2\mu}{\cos 2\mu - \cos 2\nu}, \quad (k = \text{costante}):$$

si ha in questo caso

$$f(\mu) = -k \sin 2\mu, \quad g(\nu) = -k \sin 2\nu, \quad f(s) = -k \sin 2s,$$

e l'integrale completo dell'equazione di JACOBI diventa

$$W = \int_{\nu}^{\mu} \sqrt{\frac{2[\alpha + h \cos 2s \quad k \sin 2s]}{\cos 2s - \cos 2c}}\, ds.$$

In questa funzione W sono costanti arbitrarie α e c, oltre h; e poichè nell'integrale completo basta che vi figuri, oltre h, una sola costante non additiva, così possiamo disporre di α in modo da semplificare W. Ponendo $\alpha = k \sin 2c - h \cos 2c$ otterremo per W l'espressione

$$(5) \qquad W = \int_{\nu}^{\mu} \sqrt{2\left[h + k \frac{\sin 2c - \sin 2s}{\cos 2s - \cos 2c}\right]}\, ds = \int_{\nu}^{\mu} \sqrt{2[h + k \operatorname{ctg}(c + s)]}\, ds$$

in cui la funzione integranda risulta simmetrica rispetto a c ed s.

Dopo ciò l'equazione delle traiettorie e quella del tempo sono

$$(6) \qquad \frac{\partial W}{\partial c} = \beta \quad (\beta = \text{costante}), \qquad t - t_0 = \frac{\partial W}{\partial h}.$$

Per calcolare $\frac{\partial W}{\partial c}$ osserveremo che μ e ν dipendono da c poichè da c dipende r', e pertanto dalla (5), utilizzando la notata simmetria rispetto a c ed s, avremo

$$\frac{\partial W}{\partial c}=\frac{\partial W}{\partial \mu}\frac{\partial \mu}{\partial c}+\frac{\partial W}{\partial \nu}\frac{\partial \nu}{\partial c}+\int_{\nu}^{\mu}\frac{\partial}{\partial s}\sqrt{2[h+k\operatorname{ctg}(c+s)]}ds=$$

$$=\sqrt{2[h+k\operatorname{ctg}(c+\mu)]}\frac{\partial \mu}{\partial c}-\sqrt{2[h+k\operatorname{ctg}(c+\nu)]}\frac{\partial \nu}{\partial c}+$$

$$+\sqrt{2[h+k\operatorname{ctg}(c+\mu)]}-\sqrt{2[h+k\operatorname{ctg}(c+\nu)]}.$$

Per avere $\frac{\partial \mu}{\partial c}$ e $\frac{\partial \nu}{\partial c}$, essendo

$$\frac{\partial \mu}{\partial c}=\frac{\partial \mu}{\partial r'}\frac{\partial r'}{\partial c}=\frac{1}{2}\frac{\partial r'}{\partial c},\quad \frac{\partial \nu}{\partial c}=-\frac{1}{2}\frac{\partial r'}{\partial c},$$

basterà osservare che, dal triangolo sferico APB, si ha

$$\cos r'=\cos r\cos 2c+\sin r\sin 2c\cos\widehat{A}, \tag{7}$$

e, derivando parzialmente rispetto a c, si ottiene

$$\frac{\partial r'}{\partial c}=\frac{2}{\sin r'}(\cos r\sin 2c-\sin r\cos 2c\cos\widehat{A}),$$

da cui, eliminando $\widehat{A}$ con la (7), si ha

$$\frac{\partial r'}{\partial c}=2\frac{\cos r-\cos r'\cos 2c}{\sin r'\sin 2c}$$

e, di conseguenza,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial r'}{\partial c}+1=\frac{2\sin(\mu+c)\sin(c-\nu)}{\sin(\mu-\nu)\sin 2c},\quad \frac{1}{2}\frac{\partial r'}{\partial c}-1=\frac{2\sin(c-\mu)\sin(c+\nu)}{\sin(\mu-\nu)\sin 2c}.$$

L'equazione delle traiettorie potrà scriversi allora

$$\begin{aligned}&\sqrt{2[h+k\operatorname{ctg}(c+\mu)]}\sin(\mu+c)\sin(\nu-c)+\\&+\sqrt{2[h+k\operatorname{ctg}(c+\nu)]}\sin(\mu-c)\sin(\nu+c)=\beta'\sin(\mu-\nu),\end{aligned} \tag{8}$$

ove $\beta'=-\beta(\sin 2c)/2$ è ancora una costante arbitraria. Si ha di quì che le traiettorie (coniche sferiche) passano tutte per il polo B, ove è $\mu-\nu=(=r')=0$, $\mu=\nu=r/2=c$.

Per calcolare il tempo impiegato da P per giungere in un punto della sua traiettoria consideriamo la seconda delle equazioni (6): otteniamo così dalla (5)

$$t-t_0=\int_{\nu}^{\mu}\frac{ds}{2[h+k\operatorname{ctg}(c+s)]} \tag{9}$$

la quale fornisce il tempo, espresso in coordinate ellittiche sferiche, contato a partire dall'istante in cui il punto P passa per B, poichè in questo punto è $r'=0$, $\mu=\nu$, e quindi $t=t_0$.