Bollettino
Unione Matematica Italiana

Adriano Barlotti

Alcune osservazioni sulle quartiche piane dotate di un tacnodo simmetrico.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.1, p. 55–58.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_1_55_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

Alcune osservazioni sulle quartiche piane dotate di un tacnodo simmetrico.

Nota di ADRIANO BARLOTTI (a Firenze).

Sunto. - *Si stabilisce una proprietà (che risolve un problema di chiusura) delle quartiche piane razionali dotate di un tacnodo simmetrico, e si rilevano altre circostanze, riguardanti le quartiche gobbe dotate di un nodo, collegate con quella.*

1. Recentemente è stata richiamata l'attenzione sopra alcune interessanti proprietà delle quartiche piane dotate di un biflexnodo [1]. Vogliamo qui rilevare come alcuni risultati analoghi sussistano per le quartiche (piane) razionali che posseggono un *tacnodo simmetrico* [2]. Conviene anche mettere in evidenza i loro rapporti con alcune proprietà delle quartiche gobbe dotate di un nodo (nn. 4 e 5).

2. Sia Γ_4 una quartica dotata di un tacnodo O e di un nodo A. Vogliamo provare che:

a) *Se esistono due rette,* M_1M_2 *e* N_1N_2, *per* A *tali che, indicati con* M_1, M_2 *e* N_1, N_2 *i loro punti di intersezione con la* Γ_4 *(fuori di* A*),* M_1, N_1 *e* M_2, N_2 *risultino allineati con* O, *il tacnodo* O *è simmetrico.*

b) *Quando il tacnodo* O *è simmetrico, detti* M_1, M_2, N_1, N_2 *quattro punti della* Γ_4 *e considerate le terne* M_1M_2A, N_1N_2A, M_1N_1O *e* M_2N_2O, *se tre di esse sono costituite da punti allineati, lo stesso accade della quarta.*

(1) cfr. V. DALLA VOLTA, *Su alcuni tipi di quartiche piane*, «Rend. Acc. Lincei», Serie VIII, Vol. III, (1947). pp. 301-303, M. DEDO, *Proprietà fondamentali delle quartiche piane dotate di punti doppi con tangenti inflessionali*, «Periodico di Mat.», Serie IV, Vol. XXIX, (1951). pp. 11-32, e D GALLARATI, *Alcune questioni relative a particolari quartiche piane di genere uno*, «Bollettino dell'U.M.I.», Serie III. Vol. VI, (1951), pp. 215-218.

(2) Ricordiamo che un tacnodo si dice *simmetrico* o *armonico* quando in quel punto il rapporto delle curvature dei due rami che in esso hanno origine è uguale a -1. [Cfr. C. SEGRE, *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche e sulla linea parabolica di una superficie*, «Rend. Acc. Lincei», Serie V, Vol VI, (1897), pp. 168-175, v. il n. 2].

Osserviamo dapprima che se il tacnodo O è simmetrico, in un generico fascio di coniche tangenti alla Γ_4 in O, le due coniche degeneri separano armonicamente quelle osculatrici alla Γ_4 nel punto O stesso ([3]). Allora, facendo ricorso al linguaggio infinitesimale, rappresentata con $[O^2; O_1^2; O_2, \bar{O}_2]$ la composizione del tacnodo ([4]) e indicato con H il punto della retta OO_1 appartenente all'intorno del primo ordine di O_1 (e quindi a quello del secondo ordine di O), e con K il punto «satellite» della coppia OO_1 (Enriques) — cioè quel punto che appare come comune agli intorni del primo ordine di O e di O_1 (Campedelli) — la condizione che il tacnodo O sia simmetrico si esprime scrivendo che il birapporto $(O_2\bar{O}_2HK)$ risulta armonico.

Assoggettiamo ora la curva Γ_4 alla trasformazione quadratica, ω, avente come rete omaloidica fondamentale nel piano, π, della Γ_4 quella di punti base O, O_1 ed A. Nella ω, alle rette di π corrispondono sul piano trasformato, π', le coniche di una rete avente certi punti base O', O'_1 (con O'_1 infinitamente vicino ad O') ed A' (distinto da O').

Per note proprietà della ω ([5]) — detta Γ'_2 la conica in cui si muta la Γ_4 — al punto H corrisponde il punto A', al punto K il punto O', e ad O_2 e $\bar{O}_2$ i punti O'_2 e $\bar{O}'_2$ in cui la retta $O'A'$ taglia la Γ_2'. Inoltre detti M'_1, M'_2, N'_1 e N'_2 gli omologhi di M_1, M_2, N_1 e N_2, le rette $M_1\,M_2$ e $N_1\,N_2$ vengono cambiate nelle rette $M'_1M'_2$ e $N'_1\,N'_2$, passanti per A'.

Ora dall'allineamento dei punti M_1, N_2, O e M_2, N_1, O segue quello di M'_1, N'_2, O' e di M'_2, N'_1, O', e quindi risulta $(O'_2\bar{O}'_2O'A') = -1$. Ma la corrispondenza fra l'intorno di O_1 e i punti della retta $O'A'$ è proiettiva, e pertanto $(O_2\bar{O}_2HK) = -1$, cioè il tacnodo O è simmetrico.

Da b) risulta $(O'_2\bar{O}'_2O'A') = -1$ e la proprietà indicata si deduce dall'esame del quadrangolo completo di vertici $M'_1M'_2N'_1N'_2$, tenendo conto che, nelle ipotesi fatte, due dei suoi punti diagonali cadono necessariamente in A' e O'.

3. Dalla a), particolarizzando opportunamente la posizione dei punti M_1, M_2, N_1 ed N_2, si trova che O è un tacnodo simmetrico anche quando vale una delle seguenti ipotesi:

([3]) Cfr. B. Segre, *Sui sistemi continui di curve piane con tacnodo*, «Rend. Acc. Lincei», Serie VI, Vol. IX, (1929), pp. 970-974, v. il n. 3.

([4]) Cfr., p. es., L. Campedelli, *Lezioni di Geometria*, Vol. II, p. II, *Le curve e le superficie*. II ed., Padova, Cedam, 1953, p. 116.

([5]) All'intorno del primo ordine di O la ω fa corrispondere proiettivamente l'intorno del primo ordine di O'; ai punti dell'intorno del primo ordine di O_1, i punti della retta $O'A'$; e all'intorno del primo ordine di A la retta $O'O'_1$.

a_1) A è per la Γ_4 un biflexnodo (6);

a_2) le ulteriori intersezioni della Γ_4 con le sue tangenti nel nodo A sono allineate con O;

a_3) le due rette che passano per A (o per O) e sono tangenti altrove alla Γ_4 hanno i loro punti di contatto allineati con O (con A).

Dalla b) segue invece che, se O è un tacnodo simmetrico:

b_1) qualora una delle due tangenti alla Γ_4 in A sia di flesso, A è un biflexnodo;

b_2) se le tangenti alla Γ_4 nel nodo A non sono di flesso, le loro ulteriori intersezioni con la curva sono allineate con O;

b_3) le due rette che escono da A (da O) e sono tangenti altrove alla Γ_4 hanno i loro punti di contatto allineati con O (con A).

4. Siano C_4 una quartica gobba (di seconda specie) *armonica*, cioè dotata di un nodo, P, e Q_2 una quadrica non degenere passante per essa. Se si effettua la proiezione stereografica della Q_2 da un punto, S, di una delle generatrici che escono da P, l'immagine della C_4 risulta costituita da una quartica dotata di un nodo e di un tacnodo. Allora, indicate con t_1 e t_2, g_1 e g_2, rispettivamente, le tangenti alla C_4 in P e le generatrici della Q_2 uscenti da P, le proprietà a) e b) si traducono nelle seguenti:

c) *Se nella* Q_2 *esistono quattro generatrici* (due di ciascun sistema) *che costituiscono le due coppie di lati opposti di un quadrilatero sghembo inscritto nella* C_4 (7), *le rette* g_1, g_2, t_1 *e* t_2 *formano un gruppo armonico.*

d) *Nel fascio di quadriche avente come curva base la* C_4 *esiste una quadrica,* Q_2, *per cui risulta* $(g_1 g_2 t_1 t_2) = -1$ (8) *: allora detta* g *una generica generatrice di tale* Q_2, *si considerino le generatrici del sistema opposto che escono dai punti in cui la* g *si appoggia alla* C_4. *Queste incontrano ulteriormente la quartica nei punti di una generatrice che appartiene allo stesso sistema di* g. In altre

(6) Questa proprietà è stata rilevata incidentalmente da E. MARCHIONNA, nella nota *Sulle quartiche piane razionali invarianti per un gruppo trirettangolo di omografie*, «Periodico di Mat.», Serie IV, Vol. XXXI, (1953), pp. 229-245, v. il n. 3.

(7) L'esistenza di un tale quadrilatero porta che la Q_2 ne contiene infiniti e che ogni generatrice generica appartiene ad uno di essi, come segue dalla proposizione d).

(8) Nel fascio delle quadriche che si toccano in P, la Q_2 è quella le cui generatrici g_1 e g_2 uscenti da P costituiscono la coppia comune all'involuzione che ha per rette doppie t_1 e t_2, e a quella delle coppie di rette lungo cui le quadriche del fascio tagliano il loro piano tangente comune in P.

parole *la generica generatrice di* Q_2 *forma, con altre tre generatrici della stessa quadrica, un quadrilatero sghembo inscritto in* C_4.

Gli stessi risultati, o loro casi limite (in cui due lati opposti del quadrilatero vengono a coincidere) (9) si ottengono partendo dalle proprietà enunciate nel n. 3. Ci limitiamo a rilevare esplicitamente che dalla a_1) segue che, *se la* Q_2 *è la quadrica del fascio predetto che contiene una corda principale*, r, *della* C_4 (10), *cioè che passa per il centro del Bertini, le rette* t_1 *e* t_2 *separano armonicamente* g_1 *e* g_2.

5. Per la C_4 passano due coni quadrici con il vertice distinto da P. Se assumiamo uno di questi, W_2, in luogo della Q_2, la rappresentazione stereografica di W_2 — ottenuta mediante proiezione da un punto, S, fuori della retta che unisce P al vertice, V, di W_2 — fa corrispondere alla C_4 una quartica piana dotata di un nodo (che proviene da P) e di un tacnodo (che nasce in relazione alla corda VS). Dalle a) e b) seguono allora le proprietà:

e) *Chiamati* T_1 *e* T_2, U_1 *e* U_2 *i punti in cui due generatrici generiche di* W_2 *incontrano* C_4, *la retta intersezione dei piani* PT_1U_1 *e* PT_2U_2 *incontra* W_2 *(fuori di* P*) in un punto*, R, *che con* V *separa armonicamente le intersezioni di* C_4 *con la retta* VR.

f) *Se i punti* R *e* V *separano armonicamente le intersezioni di* C_4 *con la retta che li unisce e* T_1 *e* T_2 *sono due punti di* C_4 *che appartengono ad una generatrice di* W_2, *i piani* PT_1R *e* PT_2R *incontrano ulteriormente* C_4 *in punti allineati con* V.

Per la dimostrazione basta prendere S coincidente con R (11).

Analoghe traduzioni nello spazio si possono fare per gli enunciati del n. 3.

(9) Dal fatto che le proprietà enunciate nel n. 3 siano casi limite delle a) e b) non nasce sempre come conseguenza che, effettuandone la traduzione nello spazio, si debbano necessariamente ottenere casi limite delle c) e d): infatti, come è evidente, la particolarizzazione può riflettersi sulla posizione di S. Per esempio dalla a_2) segue ancora la c).

(10) Una corda, r, della C_4 si dice *principale* quando coincide con l'intersezione dei piani osculatori alla curva nei punti di appoggio, M e N, della r. Se la Q_2 contiene la r, i lati del quadrilatero a cui si fa riferimento sono costituiti dalla r contata due volte e dalle tangenti a C_4 in M e in N.

(11) Alle proprietà e) ed f) si perviene anche direttamente tenendo presente che V è il centro di una omologia armonica che muta in sè la quartica C_4 (cfr., p. es., E. Ciani, *Introduzione alla Geometria algebrica*, Padova, Cedam, 1931, p. 277). Basta infatti osservare che la retta PR appartiene all'asse (piano di punti uniti) di quella omologia.

Stabilite così la e) e la f), le considerazioni effettuate in questo numero dànno una nuova via per giungere alla a) e alla b).