Bollettino Unione Matematica Italiana

Luigi Antonio Rosati

Sull'equazione diofantea $4/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.1, p. 59–63.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_1_59_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

Sull'equazione diofantea $4/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$.

Nota di LUIGI ANTONIO ROSATI (a Firenze)

Sunto. - *Si dà un criterio necessario e sufficiente perchè valga una congettura di* P. ERDÖS *e si prova che essa è vera per le frazioni* $4/n$ *con* $n < 141649$.

1. Nelle sue ricerche relative al numero minimo di unità frazionarie necessarie per rappresentare una frazione qualsiasi P. ERDÖS ha espresso la congettura che ogni frazione del tipo $4/n$ sia rappresentabile come somma di tre unità frazionarie positive; in altre parole che l'equazione diofantea

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \tag{1}$$

sia risolubile con numeri interi positivi x_1, x_2, x_3 qualunque sia n.

In una sua nota R. OBLÁTH [1] ha osservato che la ricordata congettura di ERDÖS sarà dimostrata vera quando sia stata risolta la (1) per tutti i valori primi di n e ha risolto la (1) per valori particolari di n. Dai suoi teoremi risulta che la (1) possiede soluzioni per tutti i numeri n inferiori a 106129.

Noi, fissato il numero primo n, troviamo una condizione necessaria e sufficiente perchè la (1) sia possibile e diamo la effettiva soluzione per $106129 \leq n < 141649$.

2. Sia n un numero primo. Se la (1) ammette soluzione sono possibili due casi:

a) n divide due (e due soli) dei denominatori x_1, x_2, x_3;

b) n divide uno solo dei denominatori x_1, x_2, x_3.

Cominciamo con l'occuparci del primo caso.

Poniamo

$$x_1 = nda, \quad x_2 = ndb, \quad x_3 = c, \quad ((c, n) = 1);$$

dove $d = (x_1/n, \ x_2/n)$ e quindi $(a, b) = 1$.

[1] R. OBLATH. Sur l'équation diophantienne $4/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$, Mathesis 59, 308-316 (1950).

Si avrà

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{nda} + \frac{1}{ndb} + \frac{1}{c},$$

ossia

$$\frac{n}{c} = \frac{4dab - a - b}{dab}. \tag{2}$$

Si ha

$$(4dab - a - b,\ dab) = (a + b,\ d);$$

posto

$$(a + b,\ d) = r, \quad d = hr, \quad a + b = rs, \quad ((h,\ s) = 1),$$

tenuto conto che il primo membro della (2) è una frazione irriducibile, avremo

$$rn = 4hrab - a - b, \tag{3}$$

ossia

$$n = 4ha(rs - a) - s \tag{3'}$$

o anche

$$n = (4har - 1)s - 4ha^2 \tag{3''}$$

e

$$c = hab.$$

Viceversa se la (3) o le equivalenti (3'), (3'') sono possibili in numeri interi positivi si ha per la (1) la soluzione

$$x_1 = nhra, \quad x_2 = nhr(rs - a), \quad x_3 = ha(rs - a). \tag{4}$$

Per ogni quaterna di interi positivi h, a, r, s con $rs > a$ si ottiene dalla (3') un numero n (non necessariamente primo) per cui la (1) è possibile e i numeri primi della forma (3') sono tutti e soli i numeri primi n per cui la (1) è possibile nel caso a).

Occupiamoci ora del secondo caso. Poniamo

$$x_1 = na, \quad x_2 = db, \quad x_3 = dc$$

dove $d = (x_2,\ x_3)$. Sarà

$$(db,\ n) = 1, \quad (dc,\ n) = 1, \quad (b,\ c) = 1.$$

Dalla (1) risulta

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{na} + \frac{1}{db} + \frac{1}{dc},$$

ossia

$$\frac{4a - 1}{na} = \frac{b + c}{dbc}. \tag{5}$$

Il denominatore del secondo membro della (5) è primo con n, il primo membro è dunque una frazione riducibile e n divide $4a - 1$. Sia

$$4a - 1 = kn, \quad \text{cioè } a = (kn + 1)/4.$$

Sia inoltre $r = (b + c,\, d)$ o anche

$$d = rh, \quad b + c = rs, \quad (h,\, s) = 1\,;$$

si ha

$$\frac{b+c}{dbc} = \frac{s}{hb(rs - b)}$$

e la frazione $\dfrac{s}{hb(rs - b)}$ è irriducibile.

Inoltre

$$\frac{4a - 1}{na} = \frac{k}{\dfrac{kn+1}{4}}$$

e anche la frazione $k/\dfrac{kn+1}{4}$ è irriducibile.

Per la (5) sarà allora

$$s = k\,,$$

$$sn + 1 = 4hb(rs - b). \tag{6}$$

Se la (6) è possibile si ottiene per la (1) la soluzione

$$x_1 = \frac{n(sn + 1)}{4} = nhb(rs - b), \; x_2 = rhb, \quad x_3 = rh(rs - b).$$

Per ogni quaterna di interi positivi h, b, r, s, se $rs > b$ e se s divide $4hb^2 + 1$ si ottiene dalla (6) un numero n per cui la (1) è possibile e i numeri primi n della forma (6) sono tutti e soli i numeri primi per cui la (1) è possibile nel caso b).

In definitiva: *Condizione necessaria e sufficiente perchè, fissato il numero primo* n, *la* (1) *sia possibile è che siano possibili o la* (3′) *o la* (6).

La congettura di Erdös sarà vera o falsa secondochè la (3′) e la (6) esauriscono tutti i numeri primi oppure no.

3. I teoremi II, III, IV, IV′ di Obláth sono tutti casi particolari della (3) o della equivalente (3′). Anzi il teorema II può essere esteso nella seguente maniera.

Dalla (3″) e dalla (4), per $h = a = 1$, $r = 3$, si ha che se $n = 11s - 4$ la (1) ha la soluzione

$$x_1 = 3n, \quad x_2 = 3n(3s - 1), \quad x_3 = 3s - 1.$$

Ora i numeri n della forma $9240a + r$ con $r = 1129$, 4561, 5881, 6409, 7729, 8521, sono tutti della forma $11s - 4$. Il teorema II di OBLÁTH acquista dunque il seguente enunciato:

L'equazione (1) *è possibile in interi positivi* x_1, x_2, x_3 *per tutti i valori di* n *esclusi al più quelli della forma* 9240a + r *con*

$r = 1$, 169, 289, 361, 529, 841, 961, 1201, 1369, 1681, 1849, 2041, 2209, 2521, 2641, 2689, 2809, 3049, 3361, 3481, 3529, 3721, 3889, 4321, 4369, 4489, 5041, 5161, 5209, 5329, 5569, 6001, 6169, 6241, 6889, 7009, 7561, 7681, 7849, 7921, 8089, 8761.

4. Vogliamo ora dare altre classi di numeri per cui la (1) è possibile. In qualche caso diamo anche le formule risolutive che possono facilmente ritrovarsi anche negli altri casi.

Nella (3″) e nelle (4) si faccia $har = 5$. Si avrà:

h	a	r	n	x_1	x_2	x_3
1	1	5	$19s - 4$	$5n$	$5n(5s - 1)$	$5s - 1$
1	5	1	$19s - 100 = 19s' - 5$	$5n$	ns'	$5s'$
5	1	1	$19s - 20 = 19s' - 1$	$5n$	$5ns'$	$5s'$

Quindi la (1) è possibile in interi positivi se

$$n \equiv -1, \ -4, \ -5, \quad (\text{mod } 19).$$

Analogamente facendo successivamente

$$har = 6, 8, 10, 11, 12, 15, 17, 18, 20, 21, 22, 30$$

si trova dalla (3″) che la (1) ha soluzioni intere positive se

$n \equiv -1, \ -2, \ -3, \ -4, \ -6, \ -8, \ -12, \ -13, \ -16, \quad (\text{mod } 23)$;

$n \equiv -1, \ -2, \ -4, \ -8, \ -16, \quad (\text{mod } 31)$;

$n \equiv -1, \ -2, \ -4, \ -5, \ -8, \ -10, \ -16, \ -20, \ -22, \quad (\text{mod } 39)$;

$n \equiv -1, \ -4, \ -11, \quad (\text{mod } 43)$;

$n \equiv -1, \ -2, \ -3, \ -4, \ -6, \ -8, \ -12, \ -16, \ -17, \ -24, \ -25, \ -32, \ -36, \quad (\text{mod } 47)$;

$n \equiv -1, \ -3, \ -4, \ -5, \ -12, \ -15, \ -20, \ -36, \ -41, \quad (\text{mod } 59)$;

$n \equiv -1, \ -4, \ -17, \quad (\text{mod } 67)$;

$n \equiv -1, \ -2, \ -3, \ -4, \ -6, \ -8, \ -9, \ -12, \ -16, \ -18, \ -24, \ -36, \ -40, \ -48, \quad (\text{mod } 71)$;

$n \equiv -1, \ -2, \ -4, \ -5, \ -8, \ -10, \ -16, \ -20, \ -21, \ -32, \ -40, \ -42, \ -64, \quad (\text{mod } 79)$;

$n \equiv -1, -3, -4, -7, -12, -21, -28, -30, -36, \pmod{83}$;
$n \equiv -1, -2, -4, -8, -11, -16, -22, -44, -49, \pmod{87}$;
$n \equiv -1, -2, -3, -4, -5, -6, -8, -10, -12, -16, -20, -24, -25, -30, -36, -40, -43, -48, -60, -61, -62, -67, -71, -72, -80, -100, \pmod{119}$.

5. Per i numeri primi n tali che $106129 \leq n < 141649$ e per i quali il teorema del n. 3 non assicura la risolubilità della (1) si ha:

n	mod	resto	n	mod	resto	n	mod	resto
106129	19	−5	114769	23	−1	129529	47	−3
106681	23	−16	115201	39	−5	130201	23	−2
106801	39	−20	115249	23	−4	130729	47	−25
107209	39	−2	116041	47	−2	131041	23	−13
107641	47	−36	116089	47	−1	132001	59	−41
107881	23	−12	116881	39	2	132049	19	−1
108529	23	−8	117889	39	−8	132169	23	−12
108649	23	−3	118801	119	−80	132409	23	−2
109201	23	−3	120121	31	−4	132721	23	−12
109321	31	−16	121081	119	−61	134401	19	−5
110161	19	−1	121321	23	−4	135601	39	−2
110881	23	−2	122761	23	−13	137209	43	−4
111049	47	−12	122929	19	−1	138889	23	−8
111409	23	−3	123169	71	−16	139801	23	−16
111721	23	−13	123601	23	−1	139969	19	−4
112249	31	−2	124489	59	−1	140281	119	−20
112921	59	−5	125329	31	−4	140449	23	−12
113089	23	−2	127681	31	−8	141121	23	−2
114601	23	−8	129361	39	−2	141241	19	−5

e allora per i risultati del n. 4 e quelli di OBLÁTH l'equazione (1) è possibile in interi positivi per ogni $n < 141649$; in altre parole l'ipotesi di ERDÖS è verificata per tutti questi valori di n.