Bollettino Unione Matematica Italiana

Carlo Bonferroni

Alcune proprietà generali di un insieme variabile.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.1, p. 5–15.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_1_5_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

Alcune proprietà generali di un insieme variabile.

Nota di CARLO BONFERRONI (a Firenze)

Sunto. - *Estendendo i risultati esposti in una precedente Nota e relativi ad un punto variabile, si dimostra che anche un insieme variabile è contenuto, salvo eccezioni numerabili, nella sua "classe limite"; si definisce la classe "limite stabile" e si dimostra che la tendenza ad essa è uniforme; si definisce la classe "limite unico" e la "continuità" di variazione dell'insieme, dimostrando alcune proprietà e facendone applicazione allo studio dell'ordinaria "tendenza uniforme" a limite.*

In una Nota precedente (¹) ho mostrato che, salvo eccezioni numerabili, una qualunque funzione univoca coincide con un elemento della sua "classe limite"; prenderò in esame, ora, una funzione plurivoca, cioè un insieme o classe variabile, mostrando come la proprietà suddetta si estenda a questo caso. Sorgono, inoltre, nuove e fondamentali questioni, per alcune delle quali esporrò la soluzione.

1. *Interlimiti.* Al punto X, variabile in un rettangolo a p dimensioni (in uno spazio euclideo), corrisponda l'insieme Y (variabile in uno spazio euclideo a q dimensioni): un punto L sarà un *interlimite* di Y per X tendente ad A se, preso il positivo h (arbitrariamente), in qualunque intorno di A si trovano punti X per cui il corrispondente Y soddisfa alla condizione $\mathrm{dist}(Y, L) < h$, cioè possiede almeno un punto di $\mathrm{Int}(L, h)$, ossia "penetra" in $\mathrm{Int}(L, h)$ (²). E se, fissato un punto Q_0 nello spazio in cui varia Y, in ogni intorno di A si trovano punti X per cui Y contiene punti fuori di $\mathrm{Int}(Q_0, h)$, si dirà che "l'infinito" è un interlimite di Y per X tendente ad A (³)

(¹) *Una proprietà generale delle funzioni* (questo Bollettino, 1953, Dic.). Questa Nota sarà citata in seguito, brevemente, con "U. p. g."; ad essa rinvio anche per alcune denominazioni e notazioni.

(²) Con $\mathrm{int}(A, h)$ indico l'*intorno* di A di raggio h (non contenente A); con $\mathrm{Int}(A, h)$ lo stesso completato con il punto A; con $\mathrm{dist}(H, K)$ la distanza fra i due insiemi H e K; con $\mathrm{Int}(H, h)$ l'insieme dei punti che distano meno di h dall'insieme H.

(³) Sono, queste, naturali estensioni delle definizioni riportate in U.p.g. (n. 1). V. anche U. CASSINA, *Limiti delle funzioni plurivoche*, Acc. d. Sc. di Torino, Atti, 1927.

2. *Esistenza di interlimiti.* Per dimostrare che Y ammette almeno un interlimite quando X tende ad A, basta associare ad X un punto particolare Q di Y: si ottiene una funzione univoca di X, la quale ammette almeno un interlimite in A (4), che, ovviamente, è interlimite anche per Y.

3. *Classe limite.* Gli interlimiti di Y, per X tendente ad A, costituiscono la *classe limite* di Y in A. Posto $Y = f(X)$, la si può indicare con $\underset{X,\,A}{\mathrm{Lim}}\, f(X)$, secondo la comune notazione di limite e usando il simbolo "Lim" di PEANO; ma di solito semplificherò la notazione scrivendo $\mathrm{Lim}\, f(A)$ (5).

È chiaro che *la classe limite in* A *è chiusa*: basta osservare che se L_0 è punto d'accumulazione di punti L (interlimiti), preso un L prossimo ad L_0, in ogni intorno di A si trovano punti prossimi ad L e, quindi, ad L_0.

4. *Intercontinuità dell'insieme variabile.* In analogia al caso in cui $f(X)$ è funzione univoca, dirò (V. U. p. g. n. 2) che l'insieme $f(X)$ è ***intercontinuo*** in A, se $f(A)$ è contenuto in $\mathrm{Lim}\, f(A)$.

Se $f(X)$ è univoca e se X tende ad A senza limitazioni, ho dimostrato (V. U. p. g. n. 3) che $f(Y)$ è intercontinua in ogni punto, salvo al più un insieme numerabile (di punti isolati). Utilizzando questo risultato dimostrerò che anche un insieme $f(X)$ è intercontinuo s. i. n. (abbreviazione che significa: salvo insieme numerabile).

Se $f(X)$ contiene (almeno) un punto che non sia interlimite in X, associamolo ad X; in caso contrario, associamo ad X un punto qualunque di $f(X)$: viene definita, in tal modo, una funzione univoca $g(X)$, la quale, essendo $g(X)$ contenuta in $f(X)$, avrà in qualunque punto A una $\mathrm{Lim}\, g(A)$ contenuta in $\mathrm{Lim}\, f(A)$. Pertanto, l'insieme I_f in cui f non è intercontinua, cioè l'insieme dei punti A in cui $g(A)$ è fuori di $\mathrm{Lim}\, f(A)$, sarà formato di punti in cui $g(A)$ è anche fuori di $\mathrm{Lim}\, g(A)$, e quindi sarà parte dell'insieme I_g in cui la g non è intercontinua; e siccome I_g, essendo $g(X)$ univoca, è numerabile (a punti isolati), lo stesso avverrà di I_f.

In conclusione: *l'insieme* f(A) *è contenuto nella classe limite di* f(X) *per* X *tendente ad* A, *salvo al più un insieme numerabile di punti* A *(isolati).* P. es., se $\mathrm{Lim}\, f(A)$ si riduce ad un unico punto L (variabile con A), anche $f(A)$ si compone di un solo punto s. i. n. Brevemente: se $\mathrm{Lim}\, f$ è funzione univoca, anche f è funzione univoca, s. i. n.

(4) V. U.p.g. n. 1, nota (2).

(5) L'argomento A non è attribuito alla funzione f, ma alla funzione "$\mathrm{Lim}\, f$", che fa corrispondere ad A una classe.

5. Quanto precede vale se X tende ad A senza restrizioni: in caso contrario, si possono ripetere le considerazioni fatte nella Nota "U. p. g„ (n. 5) e stabilire modi particolari di far tendere X ad A, nei quali resti valido il risultato. Se X varia su una retta, il risultato varrà sia a destra che a sinistra di A, ed anche in parte a destra e in parte a sinistra (V. U. p. g. n. 7).

6. *Insieme numerico.* Se $f(X)$ è un insieme di numeri reali, anche $\mathrm{Lim}\, f(A)$ è formata di numeri reali; ed essendo chiusa (n. 3), ammetterà massimo e minimo (eventualmente infiniti), i quali sono il *limite massimo* e il *limite minimo* di $f(X)$ in A, che indicherò con $\lambda' f(A)$ e $\lambda_1 f(A)$ [6]. Se si considera anche l'estremo superiore $E' f(X)$ di $f(X)$ (che è funzione univoca di X), è chiaro che il suo limite massimo, per X tendente ad A, è il limite massimo di $f(X)$ in A. Analogamente per l'estremo inferiore $E_1 f(X)$; cioè

$$(1) \qquad \lambda' f(A) = \lambda' E' f(A) \quad , \quad \lambda_1 f(A) = \lambda_1 E_1 f(A).$$

7. È naturale, ora, estendere la nota definizione del BAIRE, stabilendo che $f(X)$ *è semicontinua superiormente se è tale* $E' f(X)$. Dovrà risultare, dunque

$$E' f(A) \geq \lambda' E' f(A) \quad \text{cioè} \quad E' f(A) \geq \lambda' f(A).$$

Se vale il segno d'eguaglianza, si potrà dire che in A l'insieme $f(X)$ è *continuo superiormente* (V. per l'analogia, U. p. g. n. 2). Ora, i punti in cui $E' f(X)$, supposta superiormente semicontinua, non è continua superiormente, sono numerabili (trattandosi di funzione univoca, V. U. p. g. n. 8, a): pertanto, *un insieme* $f(X)$ *semicontinuo superiormente è anche continuo superiormente, s. i. n.* Di più: $\lambda' f(X)$, *qualunque sia* $f(X)$, *è semicontinua superiormente* [7].

Analogamente, riferendosi ad $E_1 f(X)$, si definirà la *semicontinuità inferiore* e la *continuità inferiore* e si stabilirà che, s. i. n., la prima si riduce alla seconda.

Per definire la *continuità* di $f(X)$, e non soltanto quella superiore o inferiore, occorre estendere il concetto di *limite-unico*: a tale scopo cominceremo a distinguere due tipi di interlimiti.

8. *Interlimiti stabili.* Tornando ad un insieme $Y = f(X)$ di punti, sia L un suo interlimite per X tendente ad A: se, fissato h ad

[6] S'avverta, anche qui, che A è attribuito alle funzioni $\lambda' f$, $\lambda_1 f$; e nelle successive eguaglianze (1), alle funzioni $\lambda' E' f$, $\lambda_1 E_1 f$.

[7] Per una funzione univoca la proprietà è ovvia; la si applichi, allora, ad $E' f(X)$, tenendo conto della (1) di n. 6.

arbitrio, si può trovare un intorno di A per *tutti* i punti del quale risulti dist $(L, Y) < h$, dirò che L è un *interlimite stabile*: se ciò non avviene, L sarà un *interlimite instabile.* Nel primo caso, la dist (L, Y) ha per limite zero (nel senso ordinario); nel secondo, ha per interlimite lo zero.

L'*infinito* sarà interlimite stabile in A se, fissato comunque Int (Q_0, h) nello spazio in cui varia Y, per tutti i punti X di un certo intorno di A il corrispondente Y ha punti fuori di Int (Q_0, h).

La classe Lim $f(A)$ si scinde, così, nella classe $\text{Lim}^s f(A)$ degli interlimiti stabili e nella classe $\text{Lim}^i f(A)$ di quelli instabili.

L'insieme Y tende in parte a fissarsi sugli interlimiti stabili, mentre un'altra parte oscilla fra gli interlimiti instabili.

Se $f(X)$ comprende al massimo k punti, ovviamente anche $\text{Lim}^s f(A)$ conterrà al massimo k punti, e, in tal caso, non esisteranno altri interlimiti, nemmeno instabili; se ne ha meno di k, possono esistere quantisivogliano interlimiti non stabili. Se $f(X)$ è funzione univoca, avrà al massimo un interlimite stabile, che sarà anche il suo limite unico (8).

9. Sia M punto d'accumulazione della classe Lim $f(A)$, e quindi anch'esso interlimite in A. *Se* M *è punto d'accumulazione di interlimiti non stabili,* M *può essere interlimite stabile o instabile.* P. es., se $y = \text{sen}\, x$, per x reale tendente a $+\infty$, la classe limite è l'intervallo $-1\overline{\ }1$, tutti gli interlimiti sono instabili e sono punti d'accumulazione di interlimiti instabili; se, invece, Y è la coppia $(\text{sen}\, x, 1/x)$, la classe limite è ancora $-1\overline{\ }1$, ma lo zero diviene interlimite stabile, mentre gli altri interlimiti, che s'accumulano sullo zero, restano instabili.

Se M *è punto d'accumulazione d'interlimiti stabili, anche* M *è interlimite stabile.* Per dimostrare questa proprietà (pressochè evidente), si prenda Int (M, h); in Int $(M, h/2)$ cade un limite stabile L; perciò esiste un intorno di A per ogni X del quale Y penetra in Int $(L, h/2)$ e quindi in Int (M, h).

Con ovvie modificazioni si tratta il caso di M infinito. Concludendo: *La classe dei limiti stabili è chiusa*; *la classe dei limiti non stabili può non essere chiusa.*

(8) U. Cassina — V. Nota (3), § 4 — chiama "classe dei limiti unici" la classe $\text{Lim}^s f(A)$, cioè chiama "limite unico" di $f(X)$ un interlimite stabile, in quanto può divenire limite unico per un'opportuna funzione univoca $g(X)$ contenuta in $f(X)$. È preferibile, però, riservare la denominazione di "limite unico" ad una classe che si comporti (in A) rispetto ad $f(X)$ come sarà chiarito al successivo n. 12.

Se $f(X)$ è un insieme numerico, si potranno quindi considerare il *massimo* e il *minimo limite stabile*, e gli estremi (superiore e inferiore) di $\mathrm{Lim}^s f(A)$; questi ultimi saranno gli *estremi d'oscillazione* in A.

10. *Uniformità della stabilità.* Consideriamo n interlimiti stabili $L_s (s = 1, 2, \dots, n)$ in A: preso h, per ogni X di un certo intorno j_s di A (che supporrò circolare) sarà soddisfatta la condizione di stabilità rispetto ad L_s (finito o infinito; nel più piccolo di tali intorni avverrà che, per ogni X, il corrispondente Y soddisferà alla condizione di stabilità rispetto a qualsiasi L_s. Perciò diremo che *n interlimiti stabili sono uniformemente, o simultaneamente, stabili.*

Mostrerò, ora, che tale proprietà si estende ad una infinità di interlimiti stabili formanti un insieme limitato. Mi riferirò, nella dimostrazione, a insiemi Y contenuti in un piano, con ragionamento, però, applicabile in generale.

Sia J_0 l'insieme considerato, contenuto nel quadrato R_0: se non fosse uniformemente stabile, rispetto ad un certo h_0 non sarebbe possibile soddisfare alla condizione di uniformità. Diviso, allora, R_0 in quattro quadrati eguali $R_{0i} (i = 1, 2, 3, 4)$ e detta J_{0i} la parte di J_0 che cade in R_{0i}, la stessa impossibilità si verificherebbe in almeno una delle quattro parti. Sia J_{00} tale parte — che conterrà infiniti elementi, altrimenti sarebbe uniformemente stabile — e sia R_{00} il quadrato parziale ove cade: operando su R_{00} come su R_0, e poi cosi continuando, si accerterebbe l'esistenza di un punto L' tale che ogni suo intorno conterrebbe una parte di J_0 che non soddisfa all'uniformità rispetto ad h_0. Ora, ciò è assurdo. Infatti L', punto d'accumulazione d'interlimiti stabili, è anch'esso interlimite stabile (n. 9); onde, in un certo intorno α di A, per ogni X risulta $\mathrm{dist}(Y, L') < h_0/2$, e quindi $\mathrm{dist}(Y, L) < h_0$, essendo L un qualunque interlimite stabile contenuto in α. Possiamo, così, concludere che *una parte limitata della classe limite stabile in* A *è uniformemente stabile;* cioè che *preso arbitrariamente* h, *per tutti i punti* X *di un certo intorno di* A *l'insieme corrispondente* Y *dista meno di* h *da un qualunque elemento della parte.* E sarà uniformemente stabile l'intera classe $\mathrm{Lim}^s f(A)$, se limitata.

11. Se $\mathrm{Lim}^s f(A)$ consta di una parte limitata e, inoltre, dell'infinito, essa risulterà uniformemente stabile. Infatti, preso h, un intorno circolare di A servirà per la parte limitata; un altro intorno per l'infinito; ed il minore dei due intorni servirà per tutti gli interlimiti stabili.

Soppresso da $\mathrm{Lim}^s f(A)$ l'infinito, se è interlimite stabile, resta la *parte finita*; dunque: *affinchè la classe limite stabile in* A *sia uniformemente stabile, è sufficiente che la sua parte finita sia limitata.*

La condizione non è necessaria. P. es., si faccia corrispondere al positivo x l'insieme

$$1+\frac{1}{x},\ 2+\frac{1}{x},\ 3+\frac{1}{x},\ \ldots:$$

al tendere di x all'∞, esso ha per interlimiti stabili tutti gli interi positivi e l'infinito, e questi sono uniformemente stabili, per quanto la parte finita (costituita dagli interi) non sia limitata.

È facile dar esempio di classe limite stabile non limitata e non uniformemente stabile. Al positivo x corrisponda l'intervallo $0^{-}x$: al tendere di x all'∞ sono limiti stabili tutti i punti da zero all'infinito; però essi non sono uniformemente stabili, perchè l'intervallo $0^{-}x$ non può distare meno di h da qualunque positivo.

12. *Limite unico.* Se $\mathrm{Lim}\, f(A) = \mathrm{Lim}^s f(A)$, cioè se gli interlimiti sono tutti stabili, dirò che il loro insieme costituisce il *limite unico* o, brevemente, il *limite* di $f(X)$ per X tendente ad A. È, questa, l'estensione che appare più naturale del concetto ordinario di limite per un punto funzione di punto. L'insieme Y tende a disporsi su tutto, e solo, il suo limite, se questo esiste; cioè a coincidere con esso.

Se il limite unico è un insieme limitato, la tendenza ad esso sarà uniforme (n. 11); in caso contrario, potrà non essere uniforme. L'uniformità non è, infatti, da ritenersi carattere essenziale del limite unico, come dimostra il seguente semplice esempio. Fissata in un piano una retta r e fissato un punto O fuori di essa, al punto P di r corrisponda la retta OP, considerata come insieme di punti: se P tende all'∞ su r, la retta OP ha per interlimiti stabili tutti i punti della parallela r' condotta per O alla r (compreso l'infinito). Non essendovi altri interlimiti, la r' costituisce il "limite (unico)" della retta variabile OP secondo la definizione data sopra, e anche secondo l'ordinaria definizione geometrica (in quanto tende a zero l'angolo di OP con r'. Non ha importanza, dunque, il fatto che la tendenza di OP ad r' non sia — com'è evidente — uniforme.

In analogia con la notazione di PEANO, indicherò con $\mathit{lim}\, f(A)$ il limite unico di $f(X)$ in A; in generale, esso è un insieme, ma può anche ridursi ad un punto. Se $f(X)$ è un insieme di k punti, è chiaro che $\lim f(A)$, quando esiste, è costituito al massimo da k punti; per $k=1$ il limite, se esiste, è un solo punto.

13. *Continuità.* Dopo quanto precede, e in analogia con le funzioni univoche, sembrerebbe naturale stabilire che l'insieme $f(X)$ è continuo in A se risulta $\lim f(A) = f(A)$. Senonchè, questa definizione porterebbe ad escludere dalle funzioni continue l'insieme $f(X)$ ogni qualvolta sia costituito da un insieme "aperto„ di infiniti punti: ciò perchè la classe $\lim f(A)$, che è chiusa, quando contiene $f(A)$ contiene anche ogni suo punto d'accumulazione. P. es., se $f(X)$ è formato di tutti i razionali fra 0 ed 1, il suo limite (unico) in ogni punto A è l'insieme di tutti i numeri reali di 0–1 (estremi inclusi), e quindi $f(X)$ sarebbe discontinua in ogni punto. D'altra parte, sembra artificioso escludere dalle funzioni continue la suddetta $f(X)$ che, essendo costante, ha l'andamento più semplice possibile.

Ritengo opportuno, perciò, imporre a $\lim f(A)$ di contenere $f(A)$ e, in più, solo gli eventuali punti d'accumulazione di $f(A)$ (il che è necessaria conseguenza della condizione precedente). Resta così giustificata la seguente definizione: *l'insieme* f(X) *è continuo in* A *se l'insieme* f(A), *completato con i suoi eventuali punti d'accumulazione, è limite unico di* f(X) *per* X *tendente ad* A. Dovrà risultare, dunque,

$$\lim f(A) = f(A) + \delta f(A) \tag{2}$$

essendo $\delta f(A)$ la classe "derivata„ di $f(A)$. Il 2° membro della (2) è *la minima classe chiusa contenente* f(A): con essa deve coincidere $\lim f(A)$ (9).

14. La condizione di continuità si semplifica in

$$\lim f(A) = f(A) \tag{3}$$

quando $\delta f(A)$ manca o è contenuta in $f(A)$: nel 1° caso $f(A)$ contiene un numerò finito di punti (p. es. un solo punto; e ciò avverrà in ogni A se si tratta di funzione univoca avente limite unico); nel 2°, l'insieme $f(A)$ è chiuso (10).

(9) Se K è una classe, $K + \delta K$ è anche la classe dei punti che hanno distanza nulla da K. Essa è stata considerata dal PEANO (Formulario, 1908, p. 139), che ne ha mostrata l'utilità in varie questioni. Ne risulta, ora, un'altra applicazione, che la ricollega strettamente alla continuità di variazione d'un insieme.

(10) La condizione semplificata (3) si trova in PEANO, *Applicazioni geometriche*, Torino, 1887, p. 30, n. 6. PEANO chiama *figura* un insieme di punti e definisce *limite* della figura variabile Y il luogo dei punti L tali che dist(L, Y) tenda a zero in senso ordinario (id., p. 302); cioè, con la nostra terminologia, la classe limite-stabile. PEANO non ha tenuto conto dei possibili interlimiti instabili: ma ciò si spiega riflettendo che nelle

15. *Insieme con un numero finito di punti.* Se $f(X)$ è funzione univoca e se ha limite (unico) in ogni punto, sappiamo (V. U.p.g. n. 8, *b*) che essa è continua s. i. n.: tale notevole proprietà vale anche quando $f(X)$ è composto di un numero finito di punti, con massimo k.

Dette x_i, y_i, z_i, ..., t_i le coordinate (p. es. cartesiane) di un punto Q_i di $f(X)$, ordiniamo tali punti stabilendo che Q_i "precede„ o "è minore di„ Q_j, e scrivendo $Q_i < Q_j$, se è $x_i < x_j$; qualora sia $x_i = x_j$, se risulta $y_i < y_j$; quando sia anche $y_i = y_j$, se è $z_i < z_j$; e così via sino all'ultima coordinata [11]. Se $f(X)$ comprende k punti (distinti), siano essi Q_1, Q_2, ..., Q_k in ordine crescente; se, invece, i punti sono h (con $h < k$) e precisamente Q_1, Q_2, ..., Q_h (in ordine crescente), porremo $Q_{h+1} = Q_{h+2} = ... = Q_k = Q_h$: in tal modo ad ogni X faremo corrispondere sempre k punti, dei quali solo l'ultimo potrà essere ripetuto. Poniamo, ora, $Q_i = f_i(X)$ ($i = 1$, 2, ..., k): otterremo k funzioni separatrici della funzione $f(X)$, le quali saranno univoche. Quando X tende ad A, la classe $\lim f(A)$ potrà contenere al massimo k elementi (n. 12) che, ordinati, indicheremo con L_1, L_2, ..., L_k, ripetendo L_h se gli elementi distinti sono solo h (secondo la suddetta convenzione). In un opportuno intorno di A, i punti Q_i cadono sempre e solo in prossimità di tutti i punti L_i (poichè sono tutti interlimiti stabili e non esistono altri interlimiti).

a) È chiaro che Q_1 andrà presso L_1: ciò significa che la prima funzione separatrice $f_1(X)$ avrà per limite (unico) L_1. Quindi, al variar di A, sarà $Q_1 = L_1$, s. i. n.

b) Lo stesso dicasi di Q_k, che tenderà ad L_k (unico). Sarà, dunque, $Q_k = L_k$, s. i. n.

c) Passiamo a Q_2, supponendo L_1, L_2 distinti, e quindi $L_2 \leq L_k$.

particolari figure e questioni da lui trattate (retta limite di retta variabile, piano limite di piano variabile, ecc.) non potevano presentarsi. Di più, tali figure erano insiemi chiusi.

[11] In base a questa convenzione d'ordinamento, si potrebbero considerare gli estremi (superiore ed inferiore) di $f(X)$ anche se non è un insieme numerico. Sia esso, ad es. un insieme piano. Se esiste l'ascissa massima x' in $f(X)$, si consideri l'estremo superiore y' delle ordinate dei punti di $f(X)$ d'ascissa x': il punto (x', y') sarà $E'f(X)$ (eventualmente massimo). In mancanza di massima ascissa, se $x' = E'x_i$, si consideri l'estremo superiore y'_i (eventualmente massimo) delle ordinate dei punti d'ascissa x_i, e poi il limite massimo y' di y'_i, quando x_i tende a x': si porrà $E'f(X) = (x', y')$. Similmente per $E_1 f(X)$. Gli estremi di $\mathrm{Lim}\, f(A)$, che è chiusa, saranno il *massimo* e il *minimo limite*.

Quando $f(X)$ ha un punto solo presso L_1, risulterà Q_2 prossimo ad L_2; se due o più punti cadono in prossimità di L_1, sarà Q_2 prossimo a L_1. Perciò Q_2 può avere per limite-unico L_2, oppure L_1; oppure può avere per interlimiti non stabili L_1 ed L_2. Siccome questi, però, sono stabili per $f(X)$, quando Q_2 si allontana da uno di essi viene sostituito da altri punti di $f(X)$.

Il teorema sopra ricordato per le funzioni univoche, dice che Q_2, al variar di A, coincide s. i. n. con L_1 o con L_2: quindi, tranne due i. n., cioè ancora s. i. n., sarà $Q_1 = L_1$ e Q_2 in L_1 o in L_2. Ma, s. i. n., è anche $Q_k = L_k$, e quindi, sempre s. i. n., è simultaneamente $Q_1 = L_1$, Q_2 in L_1 o in L_2, $Q_k = L_k$. Ne segue $Q_k > Q_1$, e ciò esclude $Q_2 = Q_1$ (perchè la convenzione fatta condurrebbe a $Q_k = Q_1$). Sarà simultaneamente, quindi, $Q_1 = L_1$, $Q_2 = L_2$.

d) Utilizzando questo risultato, è facile determinare il comportamento di Q_3, supponendo $L_1 < L_2 < L_3 \leq L_k$. Quando $f(X)$ ha un punto (solo) presso L_1 e un punto (solo) presso L_2, sarà Q_3 presso L_3; se due punti (solo) sono prossimi ad L_1, cadrà Q_3 presso L_2; e se tre punti o più si trovano in vicinanza di L_1, il punto Q_3 si troverà presso L_1. Perciò Q_3 può avere limite-unico o interlimiti instabili (due o tre), ma non mai fuori della terna L_1, L_2, L_3. Quindi, al variare di A il punto Q_3 coinciderà s. i. n. con L_1, o con L_2, o con L_3. Ma s. i. n. è $Q_1 = L_1$, $Q_2 = L_2$ (caso precedente), sicchè, fuori di tali i. n., sarà $Q_3 \geq L_2$. Di più s. i. n. è $Q_k = L_k$, e quindi s. i. n. risulterà simultaneamente

$$Q_1 = L_1,\ Q_2 = L_2,\ Q_3 \geq L_2,\ Q_k = L_k.$$

Ne segue $Q_k > Q_2$, e ciò esclude $Q_3 = Q_2 = L_2$ (chè seguirebbe $Q_1 = Q_2$). Simultaneamente, pertanto, sarà $Q_1 = L_1$, $Q_2 = L_2$, $Q_3 = L_3$, s. i. n.

e) Così continuando, si giunge a stabilire che s. i. n. $f(A)$ coincide con $\lim f(A)$, cioè che *l'insieme variabile* f(X), *se contiene al massimo* k *punti e se ha limite-unico in ogni punto del campo di variabilità, è continuo s. i. n.*

16. Qualora $f(X)$ contenga infiniti punti, ma sia individuato da un numero finito di essi, il precedente teorema continua a valere. Sia, p. es., $f(X) =$ segmento $Q_1 - Q_2$ (luogo di punti): non credo necessario dimostrare, data l'evidenza, che se $Q_1 - Q_2$ ha limite (unico), questo è ancora un segmento $L_1 - L_2$; e che la coppia Q_1, Q_2: ha per limite la coppia L_1, L_2. Quindi s. i. n. il segmento $f(A)$ coinciderà con il suo limite; cioè: *se* f(X) *è un segmento che ha limite unico in ogni punto, esso è funzione continua di* X *s. i. n.*

Al segmento si può sostituire la retta $Q_1 Q_2$, o il triangolo $Q_0 Q_1 Q_2$ (con Q_0 fisso), o altro insieme individuato dai due punti Q_1, Q_2.

Passando a tre punti non allineati, si potrà considerare il triangolo variabile di cui sono vertici (sia come spezzata, sia come area), oppure la circonferenza, o il cerchio, o il piano da essi individuato; ecc.

Sarà interessante studiare, infine, se la proprietà permane anche nel caso di insieme $f(X)$ generale, contenente infiniti punti ed avente limite unico in ogni punto del campo di variabilità.

Applicazione all'ordinaria tendenza uniforme a limite

17. L'ordinario concetto di "limite uniforme„ si riconduce, in modo assai naturale, a quello di "limite unico„ d'un insieme variabile.

Sia $Q = f(X, S)$, dove Q, X, S sono punti. Fissato X, il punto Q abbia limite (unito) $L(X)$ per S tendente ad S_0. La tendenza ad $L(X)$ è *uniforme* o *simultanea* per tutti i punti X se, preso h ad arbitrio, per ogni S di un certo intorno di S_0 il punto Q cade in $\mathrm{Int}(V, h)$, essendo V l'insieme dei singoli limiti L. Se ora si considera l'insieme $F(S)$ descritto da Q al variare di X e per S fisso, la condizione suddetta significa che *l'insieme* F(S) *al tendere di* S *ad* S_0 *deve avere per limite unico l'insieme* V *dei singoli limiti.* Basta, dunque, che $F(S)$ abbia un interlimite fuori di V, perchè la tendenza ad $L(X)$ non sia uniforme.

Posto $\varphi = \mathrm{dist}\,[Q(X, S), L(X)]$, il numero reale non negativo φ deve tendere a zero uniformemente. Ciò significa che, considerato l'insieme $\Phi(S)$ delle distanze φ per S fisso e X variabile, *l'insieme* Φ(S), *al tendere di* S *ad* S_0, *deve avere per limite unico lo zero.*

Un'altra interpretazione è la seguente. Se X varia in uno spazio a p dimensioni nel campo rettangolare C, si fissi uno spazio a $p+1$ dimensioni che contenga il precedente, si chiami y la nuova coordinata (ad es. cartesiana) e si indichi con (X, y) il punto di base X e nuova coordinata y. Fissato S, si faccia corrispondere ad X il punto (X, y), essendo $y = \varphi(X, S)$: al variar di X, si avrà l'insieme $D(S)$ diagramma della funzione φ. Fissato X, il punto di $D(S)$ di base X tende ad X al tendere di S ad S_0 (perchè la sua y tende a zero), e quindi C è composto di interlimiti stabili per $D(S)$; affinchè, però, la tendenza sia uniforme, *il diagramma* D(S), *al tendere di* S *ad* S_0, *deve avere per limite unico il campo* C *in cui varia* X.

18. *Un caso di limite uniforme.* Supponiamo che la funzione $y = f(X, s)$, in cui s, y sono numeri reali, sia monotonica rispetto ad s (per qualunque X di C) e che s tenda ad s_0 da una banda, ad es. crescendo da sinistra. Esisterà, allora, il limite $l(X)$ per s tendente ad s_0; di più, sarà $\varphi = |f - l|$ funzione non crescente di s e tendente a zero.

Si è visto che il diagramma $D(s)$ ha come interlimite stabile ogni punto di C: supponiamo che un altro punto $L_0 = (X_0, y_0)$ fuori di C (quindi $y_0 > 0$) sia interlimite (stabile o no) per $D(s)$. È chiaro che X_0 apparterrà a C e non cadrà all'infinito, *se* C *è chiuso e limitato.* Perciò, un valore s' renderà $\varphi(X_0, s') < y_0/2$; però, in un qualunque intorno di X_0 si troveranno punti X' per cui è $\varphi(X', s') > y_0/2$. (Se, infatti, ciò non avvenisse, non avverrebbe nemmeno per ogni $s > s'$, contro l'ipotesi che L_0 sia interlimite).

Ciò significa che $\varphi(X, s')$, come funzione solo di X, non è continua in X_0: anzi, non è nemmeno semicontinua superiormente. Ne segue che se $\varphi(X, s')$ è semicontinua superiormente non potranno esistere interlimiti fuori di C. Dunque: *se* f(X, s) *è funzione monotonica di* s *per ogni* X *del campo limitato* C, *se diciamo* l(X) *il suo limite per* s *tendente ad* s_0 *da una banda, se* $|f - l|$ *è funzione semicontinua superiormente di* X: *allora la tendenza ad* l(X) *è uniforme per tutti i punti* X *di* C.

Questo criterio d'uniformità — che si estende facilmente alla funzione $y = f(X, S)$ quando sia funzione monotonica delle singole coordinate del punto S — è già stato, sostanzialmente, segnalato (12): più che il risultato, quindi, è da notare la dimostrazione, alla quale il concetto di limite d'un insieme variabile conferisce un notevole grado di evidenza.

Ritengo, percio, che la teoria qui tratteggiata — sia pure nelle sue linee generali — possa rendersi utile in talune ricerche di Analisi matematica, presentandole sotto un aspetto geometrico e suggerendo, quindi, ragionamenti sintetici e semplici.

(12) V. Carathéodory, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, 1927, p. 176, dove è presentato per una successione di funzioni. È se questa esprime le ridotte di una serie di funzioni positive continue, convergente ad una somma continua, il criterio si può ritenere già indicato dal Dini, nei *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, Pisa, 1878, p. 110, n. 99.