
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LIANA DALMASSO

Particolari terne di curve sghembe in geometria proiettiva differenziale.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 9
(1954), n.1, p. 66–73.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_1_66_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Particolari terne
di curve sghembe in geometria proiettiva differenziale.**

Nota di LIANA DALMASSO (a Torino)

Sunto. - *In relazione con il parametro invariante recentemente considerato dal BARNER per una coppia di curve sghembe riferite tra loro, si considerano terne di curve riferite tra loro, tali che a due a due definiscano lo stesso parametro invariante.*

1. BARNER, nel suo lavoro, *Zur projektiven Differentialgeometrie*

der *Kurvenpaare*, [1] ⁽¹⁾ — adottata per una coppia di linee sghembe C , \bar{C} riferite tra loro la seguente rappresentazione analitica:

$$(1) \quad R' = aS. \quad S' = \bar{A}R + b\bar{S}, \quad \bar{S}' = A\bar{R} + \bar{b}S, \quad \bar{I}' = \bar{a}\bar{S},$$

dove $R(t)$ e $\bar{R}(t)$ sono i punti descriventi le curve C e \bar{C} ed $S(t)$ e $\bar{S}(t)$ le intersezioni, rispettivamente, delle tangenti alle curve C e \bar{C} nei punti R e \bar{R} coi piani osculatori alle curve \bar{C} e C nei punti \bar{R} ed R — introduce il « parametro invariante »

$$t^* = \int \sqrt{b\bar{b}} dt.$$

Scopo del presente lavoro è quello di studiare la possibilità di esistenza di una terna di curve riferite tra loro, tali che a due a due definiscano il medesimo parametro invariante: chiamerò « *terna associata* » una terna che gode della suddetta proprietà. Più precisamente chiamerò tale terna, di « *prima specie* » o di « *seconda specie* » secondo che tre punti corrispondenti delle linee della terna sono costantemente allineati oppure no. Presentemente considero le terne associate di « *prima specie* », riservandomi di ritornare in un lavoro successivo su quelle di « *seconda specie* »: per tale ragione nel n. 3, al principio, imposto la questione senza fare distinzione tra le due specie, allo scopo di avere formule utilizzabili per entrambe.

2. Per gli sviluppi successivi conviene rilevare che, se per quella coppia di linee sghembe si adotta, anziché la rappresentazione (1) di BARNER quella utilizzata da WILCZYNSKI [4] per lo studio di una rigata T definita da due linee direttrici — descritte rispettivamente da due punti $y(t)$, $z(t)$ — riferite tra loro, e cioè:

$$(2) \quad \begin{cases} y'' = l_1 y' + l_2 z' + l_3 y + l_4 z \\ z'' = m_1 y' + m_2 z' + m_3 y + m_4 z \end{cases}$$

detto parametro invariante si può definire mediante la

$$(3) \quad t^* = \int \sqrt{l_2 m_1} dt.$$

Ciò si conclude facilmente mettendo in relazione tra loro le rappresentazioni (1) e (2). Infatti tra le espressioni dei coefficienti

(1) I numeri entro parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia riportata a pag. 73

delle (1) in funzione di quelli delle (2) ⁽²⁾, che si trovano senza difficoltà, rileviamo quelle di b , \bar{b} e cioè

$$b = l_2 e^{\int (m_2 - \frac{m_3}{m_1} - l_1 + \frac{l_4}{l_2}) dt}; \quad \bar{b} = m_1 e^{\int -(m_2 - \frac{m_3}{m_1} - l_1 + \frac{l_4}{l_2}) dt}$$

dalle quali segue senz'altro la (3).

OSSERVAZIONE. - Quando, come in [3], si riduce il sistema (2) alla forma:

$$(2') \quad \begin{cases} y'' = l_1 y' + z' + l_2 y + l_4 z \\ z'' = y' - l_1 z' + m_3 y + m_4 z \end{cases}$$

il parametro invariante usato da BARNER viene pertanto a coincidere con quello corrispondente alla forma canonica (2').

3. Siano date dunque le due curve C , \bar{C} nella rappresentazione (2) e ricerchiamo una terza curva C^0 che con esse dia luogo ad una terna associata.

(2) Cogliamo l'occasione per osservare che il passaggio inverso porta alle

$$\begin{aligned} l_1 &= a'/a, & l_2 &= a\bar{b}/\bar{a}, & l_3 &= a\bar{A}, & l_4 &= 0 \\ m_1 &= \bar{a}\bar{b}/a, & m_2 &= \bar{a}'/\bar{a}, & m_3 &= 0, & m_4 &= \bar{a}A, \end{aligned}$$

e che mediante queste si possono tradurre nel simbolismo del sistema (1) le condizioni affinché due direttrici di una rigata T formino una *coppia congiunta* o rispettivamente *bicongiunta*, nell'accezione di cui in [3], condizioni assegnate nello stesso [3] per la rappresentazione (2) o (2').

Precisamente si trova che:

a) Condizione necessaria e sufficiente affinché siano congiunte le curve C e \bar{C} rappresentate dalle (1) è che sussista la relazione

$$a\bar{a} = k\bar{b}\bar{b}; \quad (\text{dove } k \text{ denota una costante arbitraria})$$

b) per una coppia bicongiunta, che sussista la

$$\frac{a'}{a} \left[\left(\frac{a'}{a} \right)' - a\bar{A} + \bar{a}A \right] = 0.$$

In realtà tale condizione si scinde in due: l'annullamento del primo fattore significa che la rigata T appartiene ad un complesso lineare e che le curve C e \bar{C} descritte dai punti y e z sono due direttrici tra loro coniugate armoniche rispetto alle « asintotiche di LIE ».

Perciò ovviamente l'annullamento del secondo fattore significa che le direttrici sono bicongiunte senza che si presenti necessariamente tale particolarità.

Suppongo C^0 descritta dal punto $u(t)$ con

$$(4) \quad u = \alpha y' + \beta z' + \gamma y + \delta z,$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono funzioni di t da determinare convenientemente.

Se si scrive un sistema analogo al sistema (2) per la coppia C, C^0 ed un altro per la coppia \bar{C}, C^0 , la conservazione del parametro invariante nel passaggio dalla coppia C, \bar{C} a queste due nuove coppie, si esprime, a norma della (3), nell'uguaglianza tra il prodotto $l_2 m_1$ e gli analoghi prodotti relativi ai due sistemi testè menzionati. Si trovano così, per la conservazione del parametro invariante, le seguenti condizioni cui devono soddisfare $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$(5) \quad \begin{cases} l_2 m_1 = \frac{l_1 \beta - l_2 \delta'}{\beta D - \delta B} \left[A_1 + B_1 \frac{\delta A - \alpha D}{\beta D - \delta B} + D_1 \frac{\gamma B - \beta A}{\beta D - \delta B} \right] \\ l_2 m_1 = \frac{m_2 \alpha - m_1 \gamma}{\alpha C - \gamma A} \left[B_1 + A_1 \frac{\gamma B - \beta C}{\alpha C - \gamma A} + C_1 \frac{\beta A - \alpha B}{\alpha C - \gamma A} \right] \end{cases}$$

dove $A, B, C, D; A_1, B_1, C_1, D_1$ hanno i valori seguenti:

$$\begin{cases} A = \alpha l_1 + \beta m_1 + \alpha' + \gamma \\ B = \alpha l_2 + \beta m_2 + \beta' + \delta \\ C = \alpha l_3 + \beta m_3 + \gamma' \\ D = \alpha l_4 + \beta m_4 + \delta' \end{cases} \quad \begin{cases} A_1 = A l_1 + B m_1 + A' + C \\ B_1 = A l_2 + B m_2 + B' + D \\ C_1 = A l_3 + B m_3 + C' \\ D_1 = A l_4 + B m_4 + D'. \end{cases}$$

Limitandomi d'ora in poi alle terne associate di prima specie, cosicchè nella (4) si ha $\alpha = \beta = 0$, ponendo per brevità $\gamma/\delta = \rho$, le (5) si traducono in definitiva nelle due equazioni

$$(6) \quad \begin{cases} 2\rho' - l_2 \rho^2 + (l_1 - m_2)\rho = 0 \\ 2\rho' + (l_1 - m_2)\rho + m_1 = 0 \end{cases}$$

nella funzione incognita $\rho(t)$. Eliminandone ρ' si ha $\rho = \pm i \left(\frac{m_1}{l_2} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Scrivendo poi che tale funzione soddisfa ad una delle (6) si trova la

$$(7) \quad (l_2 m_1)^{\frac{3}{2}} \pm i(l_2 m_1' - l_2' m_1 + l_1 l_2 m_1 - l_2 m_1 m_2) = 0.$$

Dunque :

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la coppia C, C rappresentata dal sistema (2) sia completabile in una terna associata di

prima specie, (nel qual caso diremo che essa è una *coppia associabile di prima specie*) è che sia soddisfatta l'una o l'altra delle condizioni (7); in questo caso esiste una linea C^0 completante la terna, la quale è descritta dal punto $u = \pm im_1^{\frac{1}{2}}y + l_2^{\frac{1}{2}}z$, dove il segno della i è da assumere in accordo con quello che figura nella (7).

In particolare, se la coppia di curve (y) e (z) è rappresentata dal sistema (2'), dove $l_2 = m_1 = 1$, $m_2 = -l_1$, la condizione (7) si riduce alle

$$(7') \quad l_1 = \pm \frac{i}{2}.$$

4. Osservo ora come, assegnate una rigata T ed una sua direttrice, esistono sulla rigata ∞^2 altre sue direttrici formanti con la data una « coppia associabile di prima specie ».

Data infatti la rigata T individuata come sopra dalla coppia (y), (z) legata dal sistema (2), se si cerca il punto $v = \gamma y + \delta z$ in modo che la coppia (y), (v) sia associabile, applicando la condizione (7) alla coppia (y), (v), si ottiene la seguente condizione per $\sigma = \gamma/\delta$:

$$(8) \quad \{ l_2[2\sigma' - l_2\sigma^2 + (l_1 - m_2)\sigma + m_1] \}^{\frac{3}{2}} \pm i \{ 2l_2\sigma'' + (3l_1l_2 - 2l_2' - 3l_2m_2 - 6l_2^2\sigma)\sigma' + 2l_2^3\sigma^3 + 3l_2^2(m_2 - l_1)\sigma^2 + (l_1'l_2 - l_2m_2' + l_1^2l_2 - l_1l_2' - 2l_1l_2m_2 + l_2'm_2 + l_2m_2^2 - 2l_2^2m_1)\sigma + l_2m_1' + m_1(l_1l_2 - l_2' - l_2m_2) \} = 0.$$

La (8) è un'equazione differenziale del 2° ordine in σ , cioè in γ/δ , il che prova l'asserto.

Nel caso del sistema (2'), la (8) si riduce alla

$$(8') \quad \{ 2\sigma' - \sigma^2 + 2l_1\sigma + 1 \}^{\frac{3}{2}} \pm i \{ 2\sigma'' + 6(l_1 - \sigma)\sigma' + 2\sigma^3 - 6l_1\sigma^2 + + 2(l_1' + 2l_1^2 - 1)\sigma + 2l_1 \} = 0.$$

5. Per indicare un esempio concreto di terna associata di prima specie, supponiamo che i punti $y(t)$, $z(t)$ descrivano una stessa cubica sghemba della quale le rette yz saranno dunque corde. Assumiamo perciò

$$\begin{aligned} y_1 &= t^3, & y_2 &= t^2, & y_3 &= t, & y_4 &= 1 \\ z_1 &= \mathfrak{S}^3, & z_2 &= \mathfrak{S}^2, & z_3 &= \mathfrak{S}, & z_4 &= 1 \end{aligned}$$

dove \mathfrak{S} deve esser determinato come una funzione $\mathfrak{S}(t)$ tale che la coppia di curve (y) e (z) sia una coppia associabile di prima specie.

I coefficienti l_1 , l_2 , m_1 , m_2 che compaiono nell'equazione di condizione (7) hanno in questo caso le espressioni:

$$l_1 = \frac{4}{t - \varkappa}, \quad l_2 = \frac{2}{\varkappa'(t - \varkappa)}, \quad m_1 = -\frac{2\varkappa'^2}{t - \varkappa}, \quad m_2 = \frac{\varkappa''(t - \varkappa) - 4\varkappa'^2}{\varkappa'(t - \varkappa)}.$$

Perciò la condizione (7), che traduce l'associabilità, si presenta attualmente nella seguente forma:

$$(9) \quad \varkappa''(t - \varkappa) + 2\varkappa'^2 + 2\varkappa' - \varkappa'^3 = 0.$$

La (9) è un'equazione differenziale del 2° ordine: ad essa deve soddisfare la funzione incognita $\varkappa(t)$ affinché la coppia di curve (y) e (z) sia una coppia associabile di prima specie.

Si verifica senz'altro che è possibile soddisfare l'equazione (9) con una funzione del tipo $\varkappa = at$ con a costante, bastando assumere a coincidente con una radice dell'equazione

$$(10) \quad 4a^2 + 7a + 4 = 0;$$

cosicchè si trovano per \varkappa le due possibilità:

$$(11) \quad \varkappa = \frac{-7 \pm i\sqrt{15}}{8} t.$$

Perciò vi sono due diverse proiettività in sè della cubica sghemba considerata, aventi i punti uniti nei punti $t = 0$, $t = \infty$, tali che ciascuna di esse conduce ad una soluzione del problema. Ora, siccome con una conveniente scelta della coordinata proiettiva sulla cubica quei due punti possono diventare due punti arbitrari della cubica stessa, è presumibile che la soluzione generale dell'equazione (9) dia per \varkappa una (conveniente) funzione lineare fratta di t .

D'altro lato ciò si conferma in quanto dalla (9) si ricava per derivazione l'annullarsi dello schwarziano della funzione $\varkappa(t)$.

Se dunque proviamo a soddisfare alla (9) con

$$(12) \quad \varkappa = \frac{pt + q}{rt + s}, \quad p, q, r, s \text{ costanti e, per semplicità, } \Delta = ps - rq = 1,$$

col che si trova che devono esser verificate l'una o l'altra delle condizioni

$$p + s = \pm \frac{1}{2}$$

si ottiene la più generale soluzione del problema.

Quanto alla terza curva C^0 completante la terna associata, nel caso particolare della (11), dal n. 3 si ricava per il punto che la

descrive l'espressione

$$(13) \quad u_1 = (a^2 + a^3)t^3, \quad u_2 = (a^2 + a^3)t^2, \quad u_3 = (a^{\frac{3}{2}} + a)t, \quad u_4 = a^2 + 1.$$

Da queste emerge il seguente risultato che, data la sua natura, possiamo enunciare senz'altro con riferimento alla più generale soluzione del problema.

La più generale corrispondenza tra due punti y e z variabili su una cubica sghemba γ tale che la cubica stessa in quanto descritta una volta dal punto y e una volta dal punto z dia luogo ad una coppia associabile di prima specie, è una corrispondenza proiettiva il cui invariante assoluto a soddisfa alla (10) e del resto arbitraria. La terna associata viene completata da un'altra cubica sghemba distinta dalla precedente, che si può ritenere caratterizzata dal fatto di avere in comune colla γ i due punti uniti della predetta proiettività, con le stesse rette tangenti e gli stessi piani osculatori e con i valori

$$I_1 = -\frac{1}{8}, \quad I_2 = -\frac{1}{2}$$

degli invarianti di B. SEGRE [2] ⁽³⁾ relativi a ciascuno dei predetti due punti.

⁽³⁾ A questo proposito bisogna osservare che, a differenza di quanto avviene per una coppia di coniche bitangenti nel piano, per due cubiche sghembe aventi in comune due punti ed in ciascuno di essi i relativi spazi osculatori, gli invarianti proiettivi di B. SEGRE relativi al primo punto non coincidono necessariamente con gli omologhi relativi al secondo, in quanto per la coppia di cubiche

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 : x_4 &= t^3 : t^2 : t : 1 \\ x_1 : x_2 : x_3 : x_4 &= c_0 \vartheta^3 : c_1 \vartheta^2 : c_2 \vartheta : 1 \end{aligned}$$

la condizione affinché si presenti la coincidenza è, come si trova facilmente, $c_1^3 = c_0 c^3_2$. E questa è soddisfatta per la coppia costituita dalla γ e dalla cubica (13).

Cogliamo l'occasione per osservare che, più in generale, in uno spazio proiettivo S_r , le condizioni affinché le coppie di C , razionali normali

$$\begin{aligned} x_i &= t^{r-i} \\ x_i &= c_i \vartheta^{r-i} \end{aligned} \quad (i = 0, 1, \dots, r)$$

($c_r = 1$) presentino una particolarità analoga, sono le

$$c_1^{r-h} c_h = c_0^{r-1-h} c_{r-h} c_{r-1}^{r-h}$$

dove, trascurando relazioni che sono conseguenza di quelle scritte, basta fare $1 \leq h \leq r-2$, o rispettivamente $2 \leq h \leq r-2$ secondocchè r è dispari o pari.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. BARNER, *Zur projektiven Differentialgeometrie der Kurvenpaare*, «*Mathematische Zeitschrift*», vol. 56, fasc. 4, 1952.

[2] B. SEGRE, *Sugli elementi curvilinei che hanno comuni le origini ed i relativi spazi osculatori*, «*Rendiconti Accademia dei Lincei*», vol. XXII, serie VI, 2° semestre, fasc. 9-10, 1935.

[3] A. TERRACINI, *Direttrici congiunte di una rigata*, «*Rendiconti del Seminario Matematico, Università e Politecnico di Torino*», vol 9°, 1949-50.

[4] E. J. WILCZYNSKI, *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*, Leipzig, 1906.
