
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ATTILIO FRAJESE

La scoperta dell'incommensurabile nel dialogo "Menone".

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 9
(1954), n.1, p. 74–80.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_1_74_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SEZIONE STORICO-DIDATTICA

La scoperta dell'incommensurabile nel dialogo « Menone »

Nota di ATTILIO FRAJESE (a Roma)

Sunto. - *Si fa vedere come in un celebre passo del dialogo platonico Menone sia contenuta la dimostrazione dell'incommensurabilità del lato e della diagonale di un quadrato, forse secondo la stessa via che condusse alla scoperta.*

In Aristotele (*Analytica priora* I, 23) troviamo un cenno sul modo di dimostrare l'incommensurabilità tra lato e diagonale del quadrato. Si tratta di una dimostrazione per assurdo: se lato e diagonale fossero commensurabili, un numero dovrebbe essere insieme pari e dispari. In uno scolio all'ultima proposizione del libro X degli Elementi di Euclide è sviluppata una dimostrazione notissima, che segue la traccia aristotelica. Se lato e diagonale del quadrato fossero commensurabili, ciascuna di queste linee conterebbe un certo numero di volte l'unità di misura: la diagonale, poniamo, p volte, il lato q volte, dove i numeri interi p, q possono essere supposti primi tra loro (bastando, in caso contrario, moltiplicare per il loro massimo comune divisore l'unità di misura prima scelta).

Il teorema di Pitagora ci permette allora di scrivere la relazione:

$$p^2 = 2q^2$$

dalla quale si vede subito che p^2 (e quindi p) è pari. Quindi, dovendo essere primi tra loro p e q , il numero q dovrà essere dispari. Ma posto $p = 2p_1$, la relazione precedente diviene:

$$4p_1^2 = 2q^2 \quad \text{da cui} \quad 2p_1^2 = q^2$$

che ci fa vedere che q^2 (e quindi q) è pari, contro quanto era stato trovato prima, che cioè q fosse dispari.

Un'altra dimostrazione dell'incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato è quella fondata sull'algoritmo del massimo comune divisore: consiste cioè nel riportare il lato sulla diagonale e il resto sul lato, mostrando, con alcuni accorgimenti, che in tal modo si è ricondotti all'operazione iniziale, in quanto riportare il resto sul lato equivale a riportare il lato sulla diagonale di un altro quadrato.

Ci domandiamo ora se sia possibile che una delle due dimostrazioni sopra accennate abbia condotto all'effettiva scoperta dell'incommensurabilità. Sembrerebbe potersi dare risposta negativa. La prima dimostrazione, fondata sullo schema aristotelico, segue invero una via semplice e immediata fino a stabilire la relazione $p^2 = 2q^2$, ma poi diventa troppo elaborata per avere valore euristico: ha infatti più la finezza di un sottile gioco sui numeri, che la spontaneità e l'immediatezza di un processo di ricerca.

Quanto alla seconda dimostrazione, va osservato che l'algoritmo del massimo comune divisore (la cui applicazione alla determinazione dell'incommensurabilità troviamo resa rigorosa nella Prop. 2 del libro X degli Elementi di Euclide) è ancora qualcosa di abbastanza riposto.

Se d'altra parte è vero, come sembra, che Platone, in un celebre passo (819 *d*) delle tarde *Leggi*, rimproveri ai Greci l'ignoranza di una scoperta così grande quale quella dell'incommensurabilità, appare naturale che egli, nella fioritura dei suoi Dialoghi tanto ricchi di allusioni e riferimenti allo sviluppo della matematica, debba aver trovato l'occasione di trattare della scoperta in questione.

Ciò tanto più che nel dialogo « *Teeteto* » vengano eternati i risultati raggiunti proprio in materia di incommensurabilità da Teodoro di Cirene e da Teeteto Ateniese. Certamente Platone ama ricordare nei suoi Dialoghi le scoperte matematiche dei contemporanei (elevando in tal modo ad esse un monumento *aere perennius*): si veda ad esempio il famoso passo dell'ipotesi geometrica del *Menone* in cui sembra sia fissata per sempre la scoperta, fatta da Leone, del diorisma; si veda il celebre passo del *Teeteto* sopra citato; si veda l'uso dei poliedri regolari quali « figure cosmiche » nel *Timeo*.

Ma tuttavia per l'importantissima scoperta dell'incommensurabilità si attenderebbe di trovare un cenno in Platone, pur non trattandosi certo di un fatto recentissimo.

Invero nel brano del *Teeteto* la rievocazione delle ricerche di Teodoro e di Teeteto stesso si riferisce ad uno stadio già evoluto della teoria degli irrazionali: Teeteto fornisce addirittura un criterio generale per riconoscere l'irrazionalità, mentre Teodoro viene rievocato per aver indicato un metodo per riconoscere l'irrazionalità, diremmo noi oggi, delle radici quadrate di 3, di 5 e via dicendo, fino alla radice quadrata di 17. È stato osservato da tutti che è significativo che Platone faccia cominciare le ricerche di Teodoro dalla radice quadrata di 3 e non dalla radice quadrata di 2. Ciò mostra, secondo l'interpretazione più comune, che dell'irrazionalità della radice quadrata di 2, cioè dell'incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato, si siano occupati altri matematici antecedenti a Teodoro.

Certamente l'omissione della radice quadrata di 2 da parte di Platone costituisce una delle prove più significative dell'antichità della scoperta in questione. Ma, ferma restando tale interpretazione, si ha pure l'impressione che Platone, nell'omettere la radice quadrata di 2, faccia un implicito riferimento ad un argomento da lui già trattato altrove, e cioè in un Dialogo precedente.

Vien fatto subito di pensare a quello che è forse il più celebre passo matematico di Platone, cioè a quel brano del *Menone* (82a-85c) in cui Socrate spinge un ragazzo ignorante, dirigendolo opportunamente, a trovare la soluzione del problema della duplicazione del quadrato.

Com'è noto, è stato prospettato nel corso del dialogo un grave dubbio circa la possibilità effettiva di *apprendere*. Socrate si accinge a risolvere il dubbio stesso ricorrendo ad una dottrina che è notoriamente pitagorica: quella che da un'esistenza precedente all'attuale portiamo in noi delle nozioni che, per dir così, sono come latenti, allo stato potenziale: *imparare* in questa vita è dunque soltanto *ricordare*, e l'azione del ricordare va soltanto aiutata, sollecitata. E Socrate vuol fornire un esempio pratico di questa dottrina della "reminiscenza,,: egli fa chiamare un giovanissimo schiavo, che parla greco, ma è assolutamente ignaro di geometria, e si dispone a fargli *ricordare* un risultato classico di tale scienza.

Egli disegna un quadrato avente il lato di due piedi e gli fa constatare che esso ha l'area di 4 piedi quadrati: gli propone poi di raddoppiare il quadrato stesso, cioè di costruire un secondo quadrato che abbia area doppia del primo, ossia l'area di 8 piedi quadrati.

Incidentalmente facciamo osservare che Socrate enuncia esplicitamente la sicurezza dell'*esistenza* del quadrato doppio, e solo in un secondo momento giungerà alla *costruzione*. C'è qui, come

già osservammo in altra occasione ⁽¹⁾, un chiaro ricorso ad una considerazione intuitiva di continuità con un processo inverso di quello che vorrebbe la nota teoria dello ZEUTHEN sulla dimostrazione dell'esistenza mediante la costruzione.

Socrate *sollecita* dal ragazzo un primo ingenuo tentativo di soluzione: il quadrato doppio si otterrà assegnando lato doppio. E poichè è stato supposto che il quadrato dato avesse lato 2, il nuovo quadrato dovrebbe avere il lato 4. Quindi l'area del nuovo quadrato sarebbe 4 volte 4, ossia 16 mentre l'area del quadrato doppio di quello iniziale deve essere 8.

Il lato 4 è dunque troppo grande: il ragazzo è così condotto a ricercare se il problema non venga risolto dal quadrato di lato 3. Ma si osserva che 3 volte 3 fa 9, e che quindi neppure questa volta si è ottenuta l'area 8.

A questo punto il ragazzo non sa più che dire, e confessa di *non sapere*.

Intermezzo: Socrate fa rilevare all'amico Menone quale ottimo risultato abbia ottenuto col suo metodo, che non insegna nulla, ma soltanto vuol suscitare dei ricordi. Prima il ragazzo credeva di sapere e affermava senz'altro che il lato doppio genererebbe un quadrato di area doppia: ora egli non sa ancora, tuttavia si accorge di non sapere. È questo, appunto, un risultato fondamentale, in quanto la sapienza ha inizio dalla coscienza della propria ignoranza.

Ripresa: Socrate disegna quattro quadrati uguali al dato, uno accanto all'altro, così da realizzare la figura del quadrato quadruplo, cioè di lato doppio. Traccia poi una diagonale in ciascun quadrato, in modo che le quattro diagonali vengano a costituire un quadrato: quello costruito appunto sulla diagonale del quadrato dato. Ma in tal modo ciascun quadrato è stato diviso dalla diagonale in due triangoli rettangoli isosceli uguali, mentre il nuovo quadrato costruito mediante le diagonali contiene quattro di tali triangoli: dunque esso è doppio del quadrato dato, sicchè il problema è risolto.

Il brano in questione può ricevere varie interpretazioni se ci si pone, come è giusto fare, da un punto di vista strettamente filosofico: ci limiteremo qui, ad ogni modo, a citare i lavori del

⁽¹⁾ A. FRAJESE, *Osservazioni sulla geometria greca e il principio di continuità*, in Boll. Un. Mat. Ital. Serie II, anno II n. 1, novembre-dicembre 1939, pp. 76-79.

DEMEL e del MUGLER ⁽²⁾, i quali chiariscono il senso del passo platonico nei riguardi della concezione che della matematica ebbe il grande filosofo.

Ma se restiamo un po' più attaccati alla *lettera* del brano, non possiamo nascondere (per dir così) una certa delusione nei riguardi della tesi che Platone intenderebbe dimostrare, potendosi tutt'al più, ci sembra, parlare di materia resa facilmente intelligibile, e non già di risultati raggiunti dal ragazzo con mezzi propri. Nel leggere il brano (che, sia detto tra parentesi, costituisce un vero capolavoro di arte didattica) vien fatto di domandarsi appunto se Platone abbia effettivamente inteso di fornire con esso un solido argomento in favore della reminiscenza, ovvero se egli non si sia voluto rifugiare, come è solito fare, nella sfumatura evanescente del *mito*. La dottrina della reminiscenza avrebbe cioè costituito soltanto un'occasione per legare alla tela del Dialogo, sotto forma didatticamente brillante, un classico risultato matematico: il brano assumerebbe così anche un valore storico preciso. Va ricordato appunto che il "*Menone*", è il dialogo col quale si inizia un nuovo indirizzo nelle relazioni tra Platone e la matematica: in esso per la prima volta il sommo filosofo entra in questioni tecniche minute, trattando della definizione di figura geometrica, del raddoppiamento del quadrato, del *diorisma* (brano detto dell'*ipotesi geometrica*).

È un vero sfoggio di nozioni matematiche e di interesse alla scienza matematica, quale forse non è dato di ritrovare in quasi nessun altro Dialogo. Sicchè potrebbe pensarsi all'ardore del neofita, cioè ad un Platone che fosse appena di ritorno dal suo primo viaggio in Sicilia, nel corso del quale avrebbe imparato matematica da Archita a Taranto e da Teodoro a Cirene. E nello stesso tempo si potrebbe pensare ad un Platone il quale, sul punto di fondare l'Accademia, esponesse una specie di *programma* generale della sua Scuola, nel quale la matematica occuperebbe posto importante.

Tornando al nostro brano, osserviamo che se il ragazzo dà effettivamente qualche risposta nella prima parte, egli non porta alcun contributo nella seconda, che è quella che propriamente conduce alla soluzione del problema. La costruzione del quadrato doppio mediante il tracciamento delle quattro diagonali è cosa che viene letteralmente imposta da un autoritario maestro, senza al-

(2) SETH DEMEL, *Platon's Verhältnis zur Mathematik*, Lipsia 1929, CHARLES MUGLER, *Platon et la recherche mathématique de son époque*, Strasburgo e Zurigo 1948.

cuna collaborazione da parte dell'allievo; cosicchè tutto il procedimento condurrebbe proprio a dimostrare l'opposto di quel che Socrate si proponeva.

Già un anonimo antico commentatore del *Teeteto* spiegava l'omissione della radice quadrata di 2 (nella descrizione delle ricerche di Teodoro) col fatto che nel passo del *Menone* sul raddoppiamento del quadrato Platone si era occupato ampiamente di tale radice. CHARLES MUGLER, nella sua pregevole opera già citata, confuta questa veduta dell'antico anonimo, alla quale noi siamo sostanzialmente più vicini, per le ragioni prima esposte. Ma il MUGLER non esita poi (op. cit. pag. 392 e segg.) a vedere nel brano del *Menone* come “*un résumé de l'histoire*”, della prima scoperta dell'irrazionale, sviluppando poi gli argomenti, con acutissime osservazioni, in direzione diversa della nostra.

Per mostrare che effettivamente il brano del *Menone* contenga l'esposizione della scoperta dell'incommensurabile, analizziamo meglio il procedimento che sopra abbiamo riassunto nell'espone il contenuto del brano stesso. In questo troviamo due parti nettamente distinte, anzi materialmente separate da un intermezzo. Nella prima parte si pone il problema della duplicazione del quadrato geometrico, ma soprattutto se ne cerca una soluzione aritmetica: vale a dire se sia possibile trovare un numero quadrato che sia doppio di un altro numero quadrato.

Si calcola, infatti, l'area del quadrato dato: essa è 4. Si raddoppia questo numero, ottenendo 8. Si passa poi a cercare un numero che moltiplicato per se stesso dia, se possibile, 8. E la ricerca dà risultato negativo, attraverso due tentativi: provando prima il 4, poi il 3. A questo punto Socrate esalta il valore *positivo* del risultato *negativo* ottenuto, risultato che da un punto di vista più generale sembra si traduca così: “Non si riesce a trovare un numero quadrato che sia doppio di un altro numero quadrato”, (3). Questo è quanto l'aritmetica ci dà.

Ma nella seconda parte interviene la geometria e, quasi “*deus ex machina*”, si presenta mirabilmente semplice agli occhi attoniti del ragazzo la costruzione delle quattro diagonali che risolve il problema.

(3) La *dimostrazione* di Platone, dati i presupposti del brano, deve essere intuitiva e simbolicamente riassuntiva, e si limita pertanto ai numeri interi; ma dovette essere assai facile vedere che, pur tentando con le frazioni, si era sempre ricondotti a cercare un numero quadrato doppio di un altro numero quadrato.

Ecco il contrasto fondamentale tra aritmetica e geometria: coi numeri non si riesce a raddoppiare il quadrato, mentre un tal problema viene risolto immediatamente con una semplicissima costruzione geometrica. Il lato del quadrato doppio è lì, davanti ai nostri occhi: basta congiungere due vertici opposti del quadrato dato per ottenere questa linea, la cui lunghezza non riusciamo invece ad esprimere coi numeri, se in numeri abbiamo espresso il lato del quadrato dato.

Ed in questo contrasto consiste proprio la mirabile scoperta dell'incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato, scoperta che può ben essere avvenuta secondo lo schema dell'esposizione platonica, con le eventuali aggiunte, da noi già prospettate, per le frazioni. Da una parte la constatazione dell'impossibilità di trovare un numero quadrato che sia doppio di un altro numero quadrato: constatazione facilissima se in uno stadio di matematica non rigorosamente trattata non si richieda una dimostrazione generale.

Dall'altra parte la scoperta, che potrebbe anche essere stata fortuita, della costruzione geometrica del quadrato di area doppia: si osservi che il disegno geometrico tracciato da Socrate nel *Menone* (quattro quadrati con le quattro diagonali) costituisce un elemento decorativo, quale è dato di ritrovare (con mattonelle divise in due parti diversamente colorate lungo la diagonale) in pavimenti antichissimi e moderni.

E come ultima conseguenza possiamo osservare che il tutto non oltrepassa i mezzi di cui disponevano i primitivi pitagorici. E certamente *pitagorica* è tutta l'esposizione del *Menone*, come l'appello alla reminiscenza dimostra.

D'altra parte l'antichità del problema della duplicazione del cubo (che data almeno da Ippocrate di Chio) fa pensare che ben più antico sia stato il problema più semplice dal quale l'altro dovette sorgere per estensione: il problema, cioè, della duplicazione del quadrato, strettamente legato alla prima scoperta dell'incommensurabile.