Bollettino
Unione Matematica Italiana

Mauro Pagni

# Alcune osservazioni sui sistemi di $m$ equazioni lineari ad $n$ incognite.

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. **9** (1954), n.1, p. 81–88.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_1_81_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

# Alcune osservazioni sui sistemi di $m$ equazioni lineari ad $n$ incognite

Nota di MAURO PAGNI (a Trieste)

**Sunto.** - *Si studiano i sistemi di equazioni lineari di* m *equazioni ad* n *incognite senza far uso dei determinanti o del simbolismo delle matrici.*

Queste righe vanno messe in relazione con le Note di G. AQUARO (1), F. SBRANA (2) di recente apparse in questo Bollettino, nelle quali si mostra la possibilità di studiare i sistemi lineari di $n$ equazioni ad $n$ incognite, e con quella di S. CHERUBINO (3) dove adoperando il simbolismo delle matrici, si studiano i sistemi di $m$ equazioni in $n$ incognite.

Scopo della presente Nota è infatti far vedere come tutta la teoria dei sistemi di $m$ equazioni in $n$ incognite possa farsi in modo affatto elementare, non solo prescindendo dal procedimento di ortonormalizzazione (AQUARO e SBRANA), ma altresì senza far uso nè di determinanti nè del simbolismo delle matrici (CHERUBINO).

La via seguita si ispira ai procedimenti adottati dal Prof. G. FICHERA per conseguire il *teorema dell'alternativa* in insiemi astratti lineari (4).

Sia $N$ un fissato corpo numerico. Sia $S_n$ l'insieme costituito dalla totalità dei vettori $u \equiv (u_1, \ldots, u_n)$ ad $n$ componenti, ciascuna delle quali è un numero di $N$. Analogamente sia $S_m$ la totalità dei vettori $u' \equiv (u'_1, \ldots, u'_m)$ ad $m$ componenti, ciascuna delle quali è un numero di $N$ (5).

(1) S. III, a. VI, n. 3 (Settembre 1951) pp. 240-245.

(2) Ibidem, n. 4 (Dicembre 1951) pp. 315-317.

(3) S. III, a. VII, n. 1 (Marzo 1952) pp. 54-59.

(4) G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, Vol. I, « Istituto Matematico della Università di Trieste », pag. 82 e segg.

(5) Ovviamente $S_n$, $S_m$ sono spazi lineari rispetto ad $N$. Per trattazioni sistematiche degli spazi lineari si veda:

S. BANACH, *Théorie des operations lineaires* « Monografie Matematycane Warszawa », (1932).

G. FICHERA, loc. cit. in (4);

M. PICONE, *Fondamenti di analisi funzionale lineare* « Libreria dell'Università di Roma », (1943).

Poniamo

$$(u,\ v)=\sum_{k=1}^{n} u_k v_k \quad , \quad (u',\ v')=\sum_{h=1}^{m} u'_h v'_h\ ;$$

$$e_1 \equiv (1,\ 0,\ \dots,\ 0) \qquad e'_1 \equiv (1,\ 0,\ \dots,\ 0)$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

$$e_n \equiv (0,\ 0,\ \dots,\ 1) \quad , \quad e'_m \equiv (0,\ 0,\ \dots,\ 1).$$

Assegnati $m$ vettori $a_h \equiv (a_{h1},\ \dots,\ a_{hn})$ $(h=1,\ \dots,\ m)$ consideriamo la trasformazione distributiva [6] $u'=T(u)$, avente dominio $S_n$ e codominio $T(S_n)\subset S_m$, definita da

$$u'_h=\sum_{k=1}^{n} a_{hk} u_k \qquad (h=1,\ \dots\ m). \tag{1}$$

Le (1) costituiscono ovviamente, quando si riguardi come assegnato il vettore $u'$ e come incognita il vettore $u$, un sistema di $m$ equazioni lineari ad $n$ incognite.

Ciò posto dimostreremo che:

Teorema I - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema* (1) *ammetta soluzioni è che il termine noto* $u' \equiv (u'_1,\ \dots,\ u'_m)$ *sia ortogonale ad ogni vettore* $v' \equiv (v'_1,\ \dots,\ v'_m)$ *soddisfacente alla*

$$\sum_{h=1}^{m} a_{hk} v'_h = 0 \qquad (k=1,\ \dots,\ n). \tag{1'}$$

Per questo proveremo innanzi tutto il seguente

Teorema II - *Se* $T(S_n)$ *non coincide con* $S_m$ *ed* $u'_0$ *è un vettore non appartenente a* $T(S_n)$ *si può costruire una funzione distributiva,* [7] *definita su* $S_m$, *nulla su* $T(S_n)$ *e diversa da zero in* $u'_0$.

Dato che $T(S_n)$ non coincide con $S_m$ vi saranno $q$ vettori $(1\leq q\leq m)$ fra gli $e'_h (h=1,\ \dots,\ m)$ che non appartengono a $T(S_n)$. Si costruisca per ricorrenza la varietà $T(S_n)+[c_1 e'_{i_1}+\ \dots\ +c_k e'_{i_k}]$ determinando gli $e'_{i_k} (k=1,\ \dots,\ p)$ in modo che $e'_{i_{k+1}}$ sia il vettore di indice più basso che non è contenuto in $T(S_n)+[c_1 e_{i_1},\ \dots,\ c_k e'_{i_k}]$.

Si perviene così ad una varietà

$$T(S_n)+[\sum_{k=1}^{p} c_k e_{i_k}]$$

che contenendo tutti gli $e'_h (h=1,\ \dots,\ m)$ coincide con $S_m$.

[6] Per la terminologia adottata vedasi opere citate in [5].

[7] Una funzione $F(u')$, definita in $S_m$, dicesi distributiva se essendo $u'$, $v'$ due qualunque elementi di $S_m$ ed $a$, $b$ numeri qualunque di $N$ risulta

$$F(au'+bv)=aF(u')+bF(v').$$

Si osservi che fissato $u'$ in $S_m$ sono univocamente determinati $v' \subset T(S_n)$ e le costanti $c_k$ in modo che

$$u' = \sum_{k=1}^{p} c_k e'_{i_k} + v'.$$

Infatti da

$$u' = w' + \sum_{k=1}^{p} c'_k e'_{i_k} \qquad (w' \subset T(S_n))$$

e dalla relazione precedente seguirebbe, denotato con $\omega$ il vettore nullo

$$\omega = v' - w' + \sum_{k=1}^{p} (c_k - c'_k) e'_{i_k}\ , \quad w' - v' = \Sigma\ (c_k - c'_k) e_{i_k}$$

e quindi, dato che $(w' - v') \subset T(S_n)$ (8), o $w' = v'$ se $c_k = c'_k$ $(k = 1, \dots, p)$, oppure vi è qualche valore dell'indice $k$ per cui $c_k \neq c'_k$. Detto $k_0$ il più grande di tali indici risulterà

$$-(c_{k_0} - c'_{k_0}) e'_{i_{k_0}} = \sum_{k=1}^{k_0 - 1} (c_k - c'_k) e'_{i_k} + (v' - w'),$$

e questo in contrasto a come sono stati presi gli $e'_{i_k}$.

Dall'osservazione ora fatta segue che $u' \subset T(S_n)$ se e soltanto se tutte le $c_k$ sono nulle. Dato che $u'_0$ non appartiene a $T(S_n)$ sia $k$ il più basso indice tale che $c^0_k \neq 0$. Posto allora $F'(u') = c_k$ si ha una funzione distributiva definita su $S_m$ nulla su $T(S_n)$ e uguale a $c^0_k \neq 0$ in $u'_0$. Da ciò il teorema su enunciato.

Osserviamo ora che ogni funzione distributiva definita in $S_m$ è del tipo $F'(u') = (u', v')$.

È intanto ovvio che $(u', v')$ sia una funzione distributiva. Proviamo che se $F'(u')$ è distributiva $F'$ riesce necessariamente della forma $F'(u') = (u', v')$. Infatti è

$$F'(u') = F'(\sum_{h=1}^{m} u'_h e'_h) = \sum_{h=1}^{m} u'_h F(e'_h) = (u', v')$$

se si pone $v' \equiv (F'(e'_1), \dots, F'(e'_m))$.

Si ha così che ogni funzione lineare è individuata da un vettore $v'$.

Siamo ora in grado di dimostrare il teorema I. Proviamo che se $u$ è soluzione della (1) e $v'$ è una qualunque soluzione di (1')

(8) $T(S_n)$ è ovviamente una *varietà lineare* cioè un insieme di $S_m$ che gode di questa proprietà: se $u'$, $v'$ appartengono a $T(S_n)$ e $a$, $b$ sono numeri di $N$, appartiene pure a $T(S_n)$ $au' + bv'$.

deve essere $(u', v') = 0$; infatti da

$$u'_k = \sum_{k=1}^{n} a_{hk} u_h \qquad (h = 1, \ldots, m)$$

e da

$$\sum_{h=1}^{m} a_{hk} v'_h = 0 \qquad (k = 1, \ldots . n)$$

segue

$$(u', v') = \sum_{h=1}^{m} u'_h v'_k = \sum_{h=1}^{m} v'_h \sum_{k=1}^{n} a_{hk} = \sum_{k=1}^{n} u_k \sum_{h=1}^{m} a_{hk} v'_h = 0.$$

Mostriamo infine che se il termine noto $u'$ è ortogonale ad ogni soluzione $v'$ della (1'), cioè se $(u', v') = 0$ per ogni $v'$ soddisfacente la (1'), è $u' \subset T(S_n)$. In caso contrario infatti si potrebbe costruire in base al teorema sopra dimostrato, una funzione distributiva $F'$ nulla su $T(S_n)$, ma non identicamente nulla in $S_m$ vale a dire si potrebbe determinare un vettore $v'$ tale che $(u', v') = 0$ per $u' \subset T(S_n)$ e $(u', v') \neq 0$ per il vettore $u'$ da noi riguardato come termine noto. Da qui un assurdo se si prova che $v'$ è soluzione di (1'). Ma dall'essere, per $u' \subset T(S_n)$,

$$\sum_{h=1}^{m} u'_h v'_h = \sum_{h=1}^{m} v'_h \sum_{k=1}^{n} a_{hk} u_k = 0$$

e quindi

$$\sum_{k=1}^{n} u_h \sum_{h=1}^{m} a_{hk} v'_k = 0$$

qualunque sia $u \subset T(S_n)$, segue (facendo $u$ uguale successivamente ad $e_1, \ldots, e'_n$) che $v'$ verifica (1'). Resta così completamente provato l'asserto.

Diamo ora la seguente definizione di caratteristica:

*Dati $m$ vettori $a_h \equiv (a_{h1}, \ldots, a_{hn})$ $(h = 1, \ldots, m)$ ad $n$ componenti diremo che essi hanno caratteristica $p$ se è possibile trovare due $p^{-ple}$ di indici $i_1, \ldots, i_p$; $k_1, \ldots, k_p (i_1, \ldots, i_p \leq n$; $k_1, \ldots, k_p \leq m)$ tali che i vettori $a_{k_s} \equiv (a_{k_s i_1}, \ldots, a_{k_s i_p})$ $(s = 1, \ldots, p)$ siano linearmente indipendenti nell' $S_p$; e $p$ sia il più grande numero per cui questo sia possibile.*

Vale il teorema seguente:

TEOREMA III - *I vettori $a_h \equiv (a_{h1}, \ldots, a_{hn})$ $(h = 1, \ldots, m)$ e i vettori $a^{(k)} = (a_{1k}, \ldots, a_{mk})$ $(k = 1, \ldots, n)$ hanno la stessa caratteristica.*

Cominciamo con l'osservare che se i vettori $a_h (h = 1, \ldots, m)$ hanno caratteristica $m$ il sistema (1) ammette sempre soluzioni.

Infatti l'essere la caratteristica uguale ad $m$ comporta che il sistema

$$\sum_{k=1}^{m} c_k a_{ki_p} = 0 \qquad (p = 1, \dots, m)$$

abbia l'unica soluzione $c_k = 0\,(k = 1, \dots, m)$ e da ciò segue che il sistema (1') ha l'unica soluzione $v'_h = 0\,(h = 1, \dots, m)$ e quindi, teor. I. che (1) è sempre risolubile.

Sia $p$ la caratteristica degli $a_h (h = 1, \dots, m)$, potremo allora sempre ricondurci a supporre che i vettori $a_i \equiv (a_{i1}, \dots, a_{ip})$ $(i = 1, \dots, p)$ siano linearmente indipendenti; faremo vedere che tali sono anche i vettori $a^{(i)} \equiv (a_{1i}, \dots a_{pi})$ $(i = 1, \dots, p)$. Supponiamo (per assurdo) che la caratteristica degli $a^{(i)}$ sia $p' < p$ e siano linearmente indipendenti i vettori $a^{(s)} \equiv (a_{1s}, \dots, a_{p's})$ $(s = 1, \dots p')$. Si consideri il sistema

$$a_{pr} = \sum_{k=1}^{p'} c_k a_{kr} \qquad (r = 1, \dots, p);$$

mostreremo che ha soluzioni. Le prime $p'$ equazioni, essendo la caratteristica degli $a^{(s)} (s = 1, \dots, p')$ uguale a $p'$, hanno per quanto poco fa osservato, soluzione. Verifichiamo che gli stessi valori dei $c_k$ soddisfano anche le rimanenti equazioni. Posto $a^{(h)} \equiv (a_{1h}, \dots$ $\dots, a_{p'h}, a_{ph})$ $(h = 1, \dots, p')$ e $a^{(q)} \equiv (a_{1q}, \dots, a_{p'q}, a_{pq})$ $(p' < q \leq p)$ risulta per quanto supposto

$$a^{(q)} = \sum_{h=1}^{p'} \lambda_h a^{(h)}$$

e quindi

$$a_{pq} = \sum_{h=1}^{p'} \lambda_h a_{ph}, \qquad a_{kq} = \sum_{h=1}^{p'} \lambda_h a_{kh} \qquad (k = 1, \dots, p'),$$

si ha allora

$$\sum_{k=1}^{p'} c_k a_{kq} = \sum_{k=1}^{p'} c_k \sum_{h=1}^{p'} \lambda_h a_{kh} = \sum_{h=1}^{p'} \lambda_h \sum_{k=1}^{p'} c_k a_{kh} = \sum_{h=1}^{p'} \lambda_h a_{ph} = a_{pq}.$$

Il sistema

$$a_{pr} = \sum_{k=1}^{p'} c_k a_{kr} \qquad (r = 1, \dots, p)$$

è così risolubile e questo significa che il vettore $a_p$ è contrariamente all'ipotesi fatte combinazione lineare dei vettori $a_1, a_r, \dots$ $\dots, a_{p'}$. In maniera analoga si prova che non può essere $p < p'$. È così dimostrato che i vettori $a^{(i)}$ sono linearmente indipendenti.

Dalle cose anzi dette segue un teorema di unicità per i sistemi lineari di $m$ equazioni ad $m$ incognite.

TEOREMA IV - *Sia*

$$u'_h = \sum_{k=1}^{m} a_{hk} u_k \qquad (h = 1, \dots, m)$$

*un sistema di $m$ equazioni ad $m$ incognite; se $m$ è la caratteristica dei vettori $a_h \equiv (a_{1h}, \dots, a_{mh})$ $(h = 1, \dots, m)$ il sistema ammette una ed una sola soluzione.*

Infatti tale sistema è risolubile ed è pure risolubile il sistema

$$\sum_{h=1}^{m} a_{hk} v'_k = u'_k \qquad (k = 1, \dots, m)$$

e da ciò segue che il sistema

$$\sum_{k=1}^{m} a_{hk} u'_k = 0 \qquad (h = 1, \dots, m)$$

ha l'unica soluzione $u'_k = 0$ $(k = 1, \dots, m)$.

Sia $p < m$ la caratteristica dei vettori $a_h \equiv (a_{h1}, \dots, a_{hn})$ $(h = 1, \dots, m)$. Potremo allora sempre ridurci a supporre che i vettori $a_i \equiv (a_{i1}, \dots, a_{ip})$ $(i = 1, \dots, p)$ siano linearmente indipendenti. Posto allora $\mu = m - p$ si considerino i $\mu$ vettori $g_s \equiv (g_{s1}, \dots, g_{sm})$ $(s = 1, \dots, \mu)$ le cui prime componenti verifichino le equazioni

$$\sum_{h=1}^{p} g_{sh} a_{hk} = a_{p+s,\, k} \qquad (k = 1, \dots, p)$$

mentre le rimanenti $\mu$ componenti siano date da

$$g_{s,\, p+r} = 0 \quad \text{se} \quad r \neq s \quad g_{s,\, p+r} = -1 \quad \text{se} \quad r = s.$$

È d'immediata verifica che i $g_s$ costituiscono $\mu$ soluzioni del sistema (1').

Mostreremo che i $g_s$ sono linearmente indipendenti e che ogni soluzione di (1') si può esprimere come combinazione lineare di essi. Infatti l'essere

$$\sum_{s=1}^{\mu} c_s g_s = 0$$

comporta

$$\sum_{s=1}^{\mu} c_s g_{s,\, p+r} = -c_r = 0 \qquad (r = 1, \dots, \mu)$$

cioè le $c_s$ tutte nulle.

Osserviamo intanto che nelle ipotesi fatte per il teorema IV un vettore soluzione di (1') è perfettamente individuato dalle sue ultime $\mu$ componenti. Detto allora $\boldsymbol{l} \equiv (l_1, \dots, l_m)$ un vettore soluzione di (1') basterà riuscire ad esprimere le ultime $\mu$ componenti come combinazione lineare delle componenti di $\boldsymbol{g}_s$ e questo si ottiene ponendo $c_s = - l_{p+s} (s = 1, \dots, \mu)$.

Dalle considerazioni ora svolte segue immediatamente che se $p < m$ è la caratteristica dei vettori $\boldsymbol{a}_h \equiv (a_{h1}, \dots, a_{hn}) (h = 1, \dots, m)$ le condizioni di compatibilità del sistema (1) date nel teorema I si traducono per il vettore $\boldsymbol{u}'$ nel soddisfacimento delle $\mu$ equazioni $(\boldsymbol{g}_s, \boldsymbol{u}') = 0 (s = 1, \dots, \mu)$. Siamo ora in grado di dare il seguente:

Teorema V - *Se $p < m$ è la caratteristica dei vettori $\boldsymbol{a}_h = (a_{h1}, \dots, a_{hn})$ $(h = 1, \dots, m)$ e se il vettore $\boldsymbol{u}'$ soddisfa le equazioni $(\boldsymbol{g}_s, \boldsymbol{u}') = 0 (s = 1, \dots, \mu)$ il sistema (1) è risolubile. Soddisfatta tale condizione, quando $p = n$ il sistema possiede una unica soluzione, nell'altro caso, posto $\nu = n - p$ e detta $\boldsymbol{t}_r$ $(r = 1, \dots, \nu)$ una $\nu^{-pla}$ di vettori ad $n$ componenti, linearmente indipendenti e tali che ogni soluzione del sistema*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{hk} u_k = 0 \qquad (h = 1, \dots, m)$$

*si possa esprimere come combinazione lineare di essi, tutte le soluzioni di (1) si ottengono ponendo*

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \sum_{r=1}^{\nu} \lambda_r \boldsymbol{t}_r$$

*disignando $\boldsymbol{u}_0$ una particolare soluzione ed essendo $\lambda_r$ numeri arbitrari.*

L'esistenza di una $\nu^{-pla}$ quale quella dei $\boldsymbol{t}$, segue con un ragionamento uguale a quello già usato per la costruzione dei $\boldsymbol{g}$. tenendo presente che i vettori $\boldsymbol{a}^{(k)} \equiv (a_{1k}, \dots, a_{mk})$ $(k = 1, \dots, n)$ hanno caratteristica uguale a $p < n$.

I teoremi I e V costituiscono il ben noto teorema di Rouché. Vediamo ora come si possa conseguire il teorema di Capelli e precisamente:

Teorema VI - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema (1) sia risolvibile è che i vettori $\boldsymbol{a}_h \equiv (a_{h1}, \dots, a_{hn})$ $(h = 1, \dots, m)$ ed i vettori $\boldsymbol{d}_h \equiv (a_{h1}, \dots, a_{hn}, u'_h)$ $(h = 1, \dots, m)$ abbiano la stessa caratteristica.*

Supponiamo che il sistema (1) sia risolubile; mostriamo che i vettori $a_h$ e $d_h$ $(h = 1, \ldots, m)$ hanno la stessa caratteristica. Sia $p$ la caratteristica degli $a_h$ o che è lo stesso degli $a^{(k)} \equiv (a_{1k}, \ldots, a_{mk})$ $(k = 1, \ldots, n)$. Potremo sempre ricondurci a supporre che siano linearmente indipendenti i vettori $a^{(i)} \equiv (a_{1i}, \ldots, a_{pi})$ $(i = 1, \ldots, p)$. Basterà allora provare che il vettore $v' \equiv (u'_1, \ldots, u'_p, u'_s)$ è combinazione lineare dei vettori $a^{(l)}(a_{1l}, \ldots, a_{pl}, a_{sl})$ $m \geq s > p$ $(l = 1, \ldots, p)$. Questo segue immediatamente se si tiene presente che è

$$a_{sr} = \sum_{i=1}^{p} c_i^{(r)} a_{si} \quad (r > p) \quad , \quad a_{tr} = \sum_{i=1}^{p} c_i^{(r)} a_{ti} \quad (t = 1, \ldots, p) \quad (r > p),$$

e che $v'$ è per ipotesi combinazione lineare dei vettori $a^{(k)} \equiv (a_{1k}, \ldots, a_{pk}, a_{sk})$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Se i vettori $a_h$, $d_h$ hanno la stessa caratteristica il sistema è risolvibile.

Infatti detta $p$ la caratteristica comune, il vettore $u \equiv (u_1, \ldots \ldots, u_n)$ avente le prime $p$ componenti verificanti il sistema

$$\sum_{k=1}^{p} a_{hk} u_k = u'_h \qquad (h = 1, \ldots, p)$$

e le rimanenti uguali a zero è soluzione del sistema (1). Per questo basterà osservare che

$$u'_s = \sum_{i=1}^{p} c_i u'_i \qquad (s > p)$$

ed

$$a_{sr} = \sum_{i=1}^{p} c_i a_{ir} \qquad (r = 1, \ldots, p) \quad (s > p).$$

Il teorema è così completamente provato.

Come abbiamo visto la risoluzione di un sistema lineare di $m$ equazioni ad $n$ incognite (quando è possibile) del tipo (1) è ricondotta, se $p$ è la caratteristica dei vettori $a_h \equiv (a_{h1}, \ldots, a_{hn})$ $(h = 1, \ldots, m)$, alla risoluzione di un sistema lineare di $p$ equazioni a $p$ incognite. Il calcolo numerico di tale soluzione si consegue con procedimenti che non si avvalgono dell'uso dei determinanti (9).

È così provato come tutta la teoria dei sistemi lineari di $m$ equazioni ad $n$ incognite possa svolgersi indipendentemente dalla nozione di determinante o matrice.

(9) Si veda ad esempio: PICONE-FICHERA, *Analisi Matematica*, I « Casa Editrice Tumminelli », (1953), pag. 93.