
BOLLETTINO

UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni.

- * Ulisse Dini, Opere, Vol. I, Edizioni Cremonese, 1953 (Alessandro Terracini)
- * Luigi Bianchi, Opere, Vol. I parte seconda, Edizioni Cremonese, Roma 1953 (Eugenio Togliatti)
- * Colloques du Centre Belge de Recherches Mathématiques, Colloque de géométrie algébrique, 1950, Colloque de topologie (Espaces fibrés), 1951, Colloque de géométrie différentielle, 1951, Deuxième colloque de géométrie différentielle, 1952, Gorges Thone, Liège, Masson, Paris (Mario Villa)
- * N. W. Mclachlan, Complex Variable Theory and Transform Calculus with Technical Applications, Second Edition, Cambridge University Press, 1953 (Giovanni Sansone)
- * C. Kuratowski, Topologie, volume I e II, Monografie Matematyczne, Varsavia 1951 e 1952 (Giuseppe Scorza Dragoni)
- * L. De Broglie, Eléments de théorie des quanta et de mécanique ondulatoire, Gautier-Villars, Paris, 1953 (Giampietro Puppi)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 9
(1954), n.1, p. 92–104.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_1_92_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

RECENSIONI

ULISSE DINI: *Opere*, a cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, volume I, Edizioni Cremonese, Roma 1953, pp. 698, L. 6000.

Soltanto quattro giorni erano trascorsi dalla morte di Ulisse Dini (ancora rivedo il momento in cui, alla fine di un tiepido ottobre — la guerra si stava concludendo — ci giunse la notizia nel giardino della villa di Breganze che ospitava il nostro Comando, e osservai Picone costernato), quando il 1° novembre 1918 Luigi Bianchi, in una prima accorata rievocazione scritta per gli *Annali di matematica*, augurava che i suoi lavori « collocato il nome accanto a quelli dei nostri sommi » venissero raccolti « in volumi, come già per le opere di Brioschi, Betti, Cremona e Beltrami ».

Esce finalmente oggi, a cura dell'Unione matematica italiana e col contributo del Consiglio nazionale delle ricerche, il primo volume delle Opere del Dini, che fa seguito a poca distanza di tempo, alle due Parti del primo volume di quelle del Bianchi (della prima riferi ai lettori del *Bollettino il Conforto*, nel fascicolo del giugno 1953).

Questo volume, in due sezioni di diversa mole, contiene rispettivamente i lavori che — con termine ormai giustificabile soltanto da un superato uso tradizionale — vengono designati come « algebrici » (pp. 29-192), e quelli pertinenti alla geometria differenziale (pp. 210-694), preceduti i primi da un'introduzione di Michele Cipolla, e gli altri del povero Enea Bortolotti.

A questi seguiranno altri due volumi di Memorie: nell'uno quelle sulle funzioni di variabile reale, o complessa, sviluppi in serie di funzioni sferiche e jacobiane, problema di Dirichlet, funzione potenziale; nell'altro sulle equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali. Un quarto volume riprodurrà il corso litografato del 1911 « *Sugli sviluppi in serie per la rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale date arbitrariamente in un certo intervallo* », che era destinato dal Dini a costituire la continuazione delle sue « *Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale* » (1880). Né di quest'opera, né dei « *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* » (1878, trad. tedesca, 1892) è, almeno per ora, prevista la ristampa.

Cinque dei sei lavori « algebrici » pubblicati nella prima sezione sono quelli sugli algoritmi infiniti (serie e prodotti infiniti), e vanno considerati sotto prospettive diverse, per il diverso momento cui risalgono e per la diversa finalità: le tre Memorie del biennio 1867-1868 devono essere considerate da un punto di

vista più strettamente storico; le rimanenti, postume, riproducono le due ultime parti del corso di Analisi superiore tenuto dal Dini a Pisa nell'anno 1917-18, ultimo del suo insegnamento, ed erano poi state pubblicate — in omaggio alla memoria del Maestro — nel 1920-21, in quegli stessi Annali delle Università toscane dove nel 1867 era uscita la Memoria « *Sulle serie a termini positivi* », la prima del gruppo di tre alle quali dianzi si è accennato.

E' questa una Memoria di interesse essenziale per la storia delle serie a termini positivi, dove l'idea fondamentale di confrontare il termine di posto n della serie con le differenze di una funzione monotona di n ha condotto il Dini a ritrovare ed estendere quel criterio veramente generale che era stato dato da Kummer. In essa — ricca di risultati nuovi, nei quali vengono anche inquadriati quelli noti — si trovano tra l'altro il « teorema di Abel-Dini » per la serie $\sum u_n/s_n^\mu$ costruita a partire da una serie divergente (teorema allora noto soltanto per $\mu = 1$; il caso $\mu > 1$ si trova in uno scritto allora inedito di Abel), ed il « teorema del Dini » sulla divergenza della serie $\sum u_n/r_n$ se la $\sum u_n$ è convergente. E' questo il lavoro di cui il Pringsheim, nella sua notissima Memoria dei *Mathematische Annalen* del 1890, deplorava che fosse rimasta sconosciuta in Germania, ed in particolare fosse sfuggita a Stolz, che attribuì al Du Bois Reymond molti risultati del Dini.

Oltre all'altro lavoro sulle serie a termini positivi, troviamo in questa parte del volume quello, pubblicato negli Annali di matematica del 1868-69, sui prodotti infiniti, dove (oltre ad un ritrovamento del teorema da alcuni chiamato di Riemann, da altri — e sembra a buon diritto — « di Riemann-Dini », sull'influenza dell'ordine dei termini nella somma di una serie semplicemente convergente; il teorema di Riemann, pubblicato nel 1867, non era noto al Dini, e inoltre in Dini vi è qualche cosetta di più che in Riemann) è risolta per la prima volta in modo completo la questione dell'influenza dell'ordine dei termini in un prodotto infinito.

Delle due Memorie postume, alle quali già si è accennato, la prima espone la teoria della moltiplicazione delle serie, riottenendo, completando e inquadrando risultati noti; la seconda è un'analisi critica dei metodi di sommazione delle serie non convergenti: trattazione non compiuta (avvertiva il Nicoletti quando questo scritto fu pubblicato per la prima volta negli Annali di matematica) ché « l'aggravarsi del male glielo impedì, ma quanto egli lasciò scritto « basta a dare un'idea del suo pensiero anche qui originale e profondo ».

Finalmente, fra i lavori « algebrici » quello che meno si allontana da tale designazione riguarda un confine superiore dei moduli delle radici di un'equazione algebrica, al quale si giunge mediante successivi affinamenti di un classico valore di tale confine (il risultato finale si trova però già — e ciò era evidentemente sfuggito al Dini — negli *Exercices* di Cauchy (1829); non mi sentirei poi d'accordo con quanto dice Cipolla, e Sansone riproduce nella sua Prefazione, che « la Memoria » in questione sia stata posta dal Perron, nella sua *Algebra*, a base della teoria della limitazione delle radici).

La rimanente parte del volume riproduce le 21 Memorie di geometria differenziale, tutte pubblicate dal Dini nel primo periodo della sua attività, ed anzi venti di esse nel primissimo: 1864-1871 (sebbene sappiamo che anche in seguito egli ha mostrato predilezione per la geometria differenziale, tra l'altro anche con l'insegnamento della geodesia — del resto già una delle Memorie ora riprodotte concerne il trasporto delle coordinate geografiche e dell'azimut lungo una geodetica dell'ellissoide rotondo —, ed ha indirettamente contribuito al suo sviluppo).

Non è questo, naturalmente, il campo di ricerche al quale più indissolubilmente resta legato il nome del Dini; ma quelle Memorie costituiscono un insieme di inestimabile pregio per chi ami risalire alle fonti, e soffermarsi sugli stadi attraverso i quali è stata elaborata la teoria delle superficie prima di giungere alla successiva sistemazione.

Nella lettura di queste Memorie ci guida sagacemente il compianto Enea Bortolotti in una succosa e perfettamente informata Introduzione a questo gruppo di lavori, la quale li inquadra nello spirito del tempo in cui furono scritti (e spesso anche li considera alla luce dei successivi sviluppi della teoria). « La « teoria generale delle equazioni differenziali e a derivate parziali » scrive Bortolotti « che è la base essenziale della geometria differenziale e d'altra parte vi « trova un naturale campo d'esercitazione e d'esperienza, richiedeva copia di « modelli concreti dei fatti generali scoperti e intuiti; di qui lo stimolo a ri- « cercare, magari attraverso a laboriosi svolgimenti e col sussidio dei più sva- « riati artifici, la determinazione in termini finiti di classi più o meno estese — « possibilmente di quella più ampia che costituisce l'integrale generale — di « enti geometrici soddisfacenti a prescritte condizioni differenziali, cioè soluzioni « di equazioni o sistemi assegnati ». E più avanti; « possiamo precisare il signifi- « ficato dell'opera del Dini nei campi geometrico-differenziali dicendo che egli « ha avuto una parte di primo piano nella elaborazione di quel substrato di « idee, di vedute, di fatti geometrici concreti che ha reso possibile lo sviluppo « moderno della teoria ».

Il Dini si affacciò alla vita scientifica nel momento in cui a Pisa era stato chiamato il Beltrami (ed in quello stesso anno 1864 era stato a Pisa Riemann), e fu nel 1865 a Parigi, dove fiorivano gli studi di geometria differenziale. Egli si trovò così quasi naturalmente condotto ad operare in tale campo. E vi operò in due sensi: anzitutto in quello studio di questioni particolari, alle quali si riferisce Enea Bortolotti nel primo dei due passi citati (ma è da dire che molte di esse hanno quell'interesse permanente che proviene dall'esigenza di conoscere una teoria non solo nei suoi risultati di portata generale, ma anche attraverso una collezione di casi particolari in cui quelli assumano forma concreta; e che inoltre, pur prescindendo da tale circostanza, quelle questioni assumono maggior rilievo in quanto il loro sorgere ed il loro studio si accompagna e si intreccia nel Dini con quello di teorie generali); e poi nella elaborazione di idee e di proprietà generali che hanno lasciato un'orma notevole nella teoria generale delle superficie.

Appunto per quell'intrecciarsi non è sempre facile distinguere in modo categorico quali di quelle Memorie abbiano una finalità generale, e quali meno. Comunque, tra le prime (oltre al primo lavoro, estratto dalla tesi di laurea propostagli dal Betti, nel quale il Dini scrive in coordinate curvilinee qualunque l'equazione differenziale dalla quale dipende la ricerca delle superficie applicabili su una data, seguendo Bour che l'aveva scritta in parametri isotropi, e precedendo Darboux che le diede poi forma invariante) sono le tre Memorie del triennio 1868-1870 che si intitolano variamente alla teoria delle superficie, dove è svolta una teoria generale della rappresentazione di una superficie su un'altra; dove è indagata a fondo la rappresentazione sferica (e vi troviamo la « condizione del Dini » per il ds^2 sferico in parametri asintotici); dove equazioni equivalenti a quelle di Codazzi, scritte in modo autonomo, sia per la superficie stessa riferita alle linee di curvatura sia per l'immagine sferica in coordinate curvilinee qualunque, sono fonti fecondissime di conseguenze; dove si studiano le falde dell'evoluta; dove infine ci si imbatte in proprietà, che piace

vedere qua come sono nate prima che entrassero nei trattati dove noi abbiamo imparato a conoscerle (così la divisione di una superficie pseudosferica in rombi infinitesimi per mezzo delle asintotiche).

Lo studio delle rappresentazioni di una superficie su un'altra ha condotto il Dini alla determinazione delle superficie rappresentabili geodeticamente una sull'altra, problema posto dal Beltrami alla fine della sua Memoria nella quale aveva trovate quelle rappresentabili geodeticamente sul piano, rispondendo così ad una questione implicitamente posta già da Lagrange. La Memoria del Dini, in cui quelle superficie vengono caratterizzate sia dal ds^2 di Liouville sia dalla proprietà di contenere un doppio sistema ortogonale isoterma di ellissi ed iperboli geodetiche, ha un contenuto classico, sul quale poggiano le trattazioni adottate sia dal Bianchi, sia da Darboux.

Tra le superficie particolari sulle quali a più riprese si è soffermato il Dini sono quelle con sistemi di linee di curvatura piane o sferiche; ogni tappa è densa di significato talora per la generalità del risultato, talora per la sua presentazione in forma adattabile ad ulteriori particolari esigenze, quali quella che si tratti di una superficie a curvatura costante, o più generalmente di una superficie W , ecc.

Cronologicamente prima di questi vengono i numerosi lavori sulle rigate, con le relative questioni di applicabilità, o con determinate particolarità (per esempio superficie rigate W , nella cui determinazione il Dini si era incontrato col Beltrami): tra essi anche quelli sulle rigate rappresentabili con un'equazione alle derivate parziali del second'ordine $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$.

La varietà dei contributi portati dal Dini a questioni particolari di geometria differenziale rischierebbero di sminuzzare troppo questa rapida notizia bibliografica; nè poi potremmo in questo campo soffermarci in ogni caso a dire dove si sia, o non si sia, il Dini incontrato con risultati di altri geometri; sarà questo il compito di chi scriverà una storia della geometria differenziale, ed a preparare tale compito il presente volume è un contributo prezioso. Un solo particolare: chi si accingerà allo studio delle Memorie del Dini vi coglierà nel loro sorgere anche quelle elicoidi del Dini — o, come più volte le ha chiamate il Bianchi « quelle singolari elicoidi del Dini » — che sono generate dal moto elicoidale di una trattrice intorno all'asintoto, e risultano particolari elicoidi pseudosferiche. Cose elementari, si dirà forse; ma anche da queste cose è nata la geometria differenziale, e fa piacere di tornarci su. E chi le dimenticasse rischierebbe, nell'esclusivismo di teorie astratte e generali, di perdere il contatto con una sana visione concreta che in quelle teorie fornisce spesso un punto fermo sul quale riposare la mente.

Il volume, oltre ad una prefazione di Sansone, instancabile propulsore ed animatore della pubblicazione delle Opere dei grandi matematici delle passate generazioni, ed in ispecie di quelle del Dini, contiene la commemorazione del Dini letta dal Bianchi nel 1922 nell'Università di Pisa e pubblicata negli Annali delle Università toscane (una delle quattro dovute al Bianchi, tutte ripubblicate nella parte seconda del vol. I delle sue Opere); un elenco delle pubblicazioni del Dini (quelle riprodotte nel presente volume corrispondono ai nn. 13, 15, 17, 46, 68, 69 per la prima parte, ed ai nn. 1-12, 14, 16, 18-22, 24, 33 per la seconda); ed un elenco delle commemorazioni del Dini.

Errori di stampa, pochi; presentazione tipografica ottima. Un bel volume, che fa onore soprattutto al Dini, ma anche un poco all'Unione matematica italiana.

LUIGI BIANCHI, *Opere*, a cura dell'Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio nazionale delle Ricerche. Vol. I parte seconda, pp. 276; Vol. II, pp. 338. Roma, Edizioni Cremonese, 1953.

A pochi mesi di distanza dalla prima parte del primo volume, comparsa alla fine del 1952, sono stati pubblicati nel corso del 1953 la seconda parte del primo volume ed il secondo volume della bella edizione delle « Opere » di Luigi Bianchi, che l'Unione matematica italiana ha voluto intraprendere, con l'aiuto del Consiglio nazionale delle ricerche, per onorare degnamente la memoria di uno dei più illustri matematici italiani.

Non occorre ripetere nulla qui sul piano generale di questa pubblicazione, dopo che il compianto prof. F. Conforto ne ha già esposto così magistralmente i caratteri essenziali in questo stesso Bollettino; ci limitiamo quindi a brevi cenni sul contenuto particolare dei due volumi ora pubblicati.

La seconda parte del primo volume contiene anzitutto, preceduta da una breve relazione di F. Conforto, la Memoria del 1880 sulle curve ellittiche normali, nella quale l'A., muovendosi in un ordine d'idee dovuto a F. Klein, studia le curve ellittiche normali di ordine n in uno spazio ad $n - 1$ dimensioni servendosi delle funzioni ellittiche di Weierstrass. Seguono, con introduzione di U. Amaldi, tre Memorie del 1902-1903 sui gruppi continui di trasformazioni; nelle due prime di esse si danno i criteri per caratterizzare i gruppi continui finiti che son simili a gruppi equivalenti o proporzionali; mentre nell'altra si estende ai gruppi continui finiti il concetto di gruppo complementare. Seguono otto Memorie riguardanti la teoria delle equazioni alle derivate parziali, con una presentazione di E. Bompiani ed Enea Bortolotti; lavori che si estendono ad un'epoca che va dal 1886 al 1918. Come ben rilevano i presentatori, è notevole assai in questo gruppo di lavori il senso geometrico che ispira le varie questioni trattate e ne rivela l'origine. In fondo al volume sono state raccolte le commemorazioni e le relazioni fatte dal Bianchi, in epoche varie, per Sophus Lie, per J. Weingarten, per il Dini, per C. Jordan, per F. Klein.

Il volume secondo contiene sedici Memorie, che si estendono tra il 1877 ed il 1911, e che riguardano questioni di applicabilità e di deformazioni finite od infinitesime delle superficie. Precede una relazione assai ampia di R. Calapso, contenente anche qualche veduta nuova di esposizione e di collegamento. Sono ben note l'importanza e l'estensione che hanno nella produzione scientifica di Luigi Bianchi i problemi dell'applicabilità e della deformazione delle superficie; ad essi è dedicato il primo lavoro scientifico del Bianchi, che risale al 1877, e nel quale si pone il concetto di superficie applicabili negli spazi a curvatura costante e se ne fa applicazione alle superficie di rotazione. Segue una Memoria del 1878 sulla deformazione delle superficie di traslazione; segue ancora un estratto, del 1879, della tesi di laurea del Bianchi, dove pure si parla della deformazione di superficie di tipo particolare. Dopo due brevi Note riguardanti l'una certe particolari deformazioni delle superficie ad area minima, e l'altra l'equazione alle derivate parziali di Cayley che dà la superficie successiva ad una data entro un sistema triplo ortogonale di cui essa faccia parte, si arriva alla classica Memoria del 1892 sulle deformazioni infinitesime delle superficie flessibili ed inestendibili. È ben noto che, in questo lavoro, riprendendo la soluzione data da Weingarten del problema della deformazione infinitesima di una superficie, la quale fa dipendere la deformazione stessa dalla ricerca di una sola funzione, la cosiddetta funzione caratteristica della deformazione, il Bianchi assegna un significato geometrico di detta funzione attraverso il concetto di due

superficie associate: vuol dire di due superficie che si corrispondono punto a punto per parallelismo di piani tangenti in modo che le linee asintotiche di una di esse si mutano sull'altra nelle linee di un sistema doppio coniugato; avviene allora che la distanza dall'origine delle coordinate del piano tangente di una delle due superficie è funzione caratteristica di una deformazione infinitesima dell'altra superficie. È una visione geometrica della questione che ha portato nuova luce nella risoluzione anche di altri problemi aprendo nuove vie in campi difficili della geometria differenziale. Collegate intimamente con la precedente sono le due Memorie seguenti, del 1904-1905, dedicate alle coppie di superficie applicabili le cui rappresentazioni sferiche son legate da una trasformazione equivalente. La Memoria successiva, del 1905, è dedicata essa pure alla deformazione delle superficie, per accertare col dovuto rigore la proprietà delle asintotiche di una superficie di essere linee di piegamento della superficie stessa. Seguono una Memoria del 1910 sulle superficie rigate applicabili sul catenoide; ed altre due, del 1899 e del 1902, sulla deformazione delle superficie di rotazione. Viene quindi la celebre Memoria del 1914 sulle coppie di superficie applicabili per le quali le distanze di due punti omòloghi da un punto fisso assegnato stanno tra loro in un rapporto costante; il caso in cui la deformazione che muta l'una superficie nell'altra sia infinitesima si ottiene dal precedente, in cui la deformazione stessa è invece finita, semplicemente supponendo che quel rapporto costante tenda all'unità. Alla fine due voluminose Memorie del 1910-1911; la prima di esse studia le deformazioni continue isogonali delle superficie pseudosferiche nello spazio Euclideo, cioè quei sistemi continui di tali superficie per i quali ciascuna superficie del sistema è tagliata sotto angolo costante (in generale diverso da una superficie all'altra del sistema) dalle traiettorie di tutti i suoi punti; la seconda Memoria tratta lo stesso problema negli spazi a curvatura costante non nulla.

EUGENIO TOGLIATTI

Colloques du Centre Belge de Recherches Mathématiques. - *Colloque de géométrie algébrique*, pagg. 198, 1950; *Colloque de topologie (Espaces fibrés)*, pagg. 138, 1951; *Colloque de géométrie différentielle*, pag. 236, 1951; *Deuxième colloque de géométrie algébrique*, pagg. 244, 1952. Editori: Georges Thone, Liège-Masson, Paris

Il Centro belga di Ricerche matematiche, sotto la guida del suo illustre Presidente Lucien Godeaux, ha organizzato dal 1949 al 1952 quattro Colloqui internazionali di cui il 1° dedicato alla Geometria Algebrica, il 2° alla Topologia (Spazi fibrati), il 3° alla Geometria Differenziale e il 4° ancora alla Geometria Algebrica. Il 1° di questi riuscitissimi Colloqui ebbe luogo a Liège nel dicembre 1949, il 2° a Bruxelles nel giugno 1950, il 3° a Louvain nell'aprile del 1951 ed il 4° a Liège nel giugno 1952.

Le conferenze pronunciate durante i Colloqui sono state raccolte in quattro volumi (uno per ciascun Colloquio). Il valore scientifico di questi volumi è certamente assai notevole in quanto viene in essi esposto, da parte di Autori fra i più qualificati, lo stato attuale di parecchi importanti e moderni indirizzi di ricerche matematiche e ne vengono indicate le possibilità di ulteriore sviluppo.

Preziose anche le numerosissime indicazioni bibliografiche.

Ai colloqui hanno partecipato i seguenti matematici italiani: Andreotti, Bompiani, Chisini, Conforto, Segre, Severi, Terracini e il Recensore.

Ed ora ecco i titoli delle conferenze costituenti i Colloqui:

Primo Colloquio di Geometria Algebrica:

- Severi F., *La Geometria algebrica italiana, il suo rigore, i suoi metodi, i suoi problemi.*
 Dubreil-Jacotin M. L., Dubieil P. *Sui vari tipi di anelli che intervengono in Geometria algebrica.*
 Van der Waerden B. L., *Le varietà di catene sopra una varietà astratta.*
 Samuel P., *Multiplicità delle componenti singolari d'intersezione.*
 Chatelet F., *Applicazione delle idee di Galois alla Geometria algebrica.*
 Garnier R., *Integrazione uniforme di certi sistemi del quarto ordine, a due variabili indipendenti, associati ad una superficie algebrica.*
 Segre B., *Problemi aritmetici in Geometria algebrica.*
 Libois P., *La sintesi della Geometria e dell'Algebra.*
 Bureau F., *Alcune questioni di Geometria suggerite dalla teoria delle equazioni alle derivate parziali totalmente iperboliche.*
 Godeaux L., *Applicazioni della teoria delle involuzioni cicliche appartenenti ad una superficie algebrica.*

Colloquio di Topologia:

- Hopf H., *Introduzione alla teoria degli spazi fibrati.*
 Cartan H., *Nozioni di algebra differenziale; applicazione ai gruppi di Lie ed alle varietà sulle quali opera un gruppo di Lie.*
 Ehresmann C., *Le connessioni infinitesimali in uno spazio fibrato differenziabile.*
 Cartan H., *La trasgressione in un gruppo di Lie ed in uno spazio fibrato principale.*
 Koszul J. L., *Su un tipo di algebre differenziali in relazione con la trasgressione.*
 Eckmann B., *Spazi fibrati e omotopia.*
 Leray J., *Sull'omologia dei gruppi di Lie, degli spazi omogenei e degli spazi fibrati principali.*
 Hopf H., *Su una formula della teoria degli spazi fibrati.*
 Hirsch G., *Alcune relazioni fra l'omologia negli spazi fibrati e le classi caratteristiche relative ad un gruppo di struttura.*

Colloquio di Geometria differenziale:

- Bompiani E., *Topologia degli elementi differenziali ed alcune applicazioni.*
 Favard J., *Alcuni problemi di coperchi.*
 Terracini A., *La nozione di incidenza di piani « infinitamente vicini ».*
 Schouten J. A., *Sui tensori di V_n alle direzioni principali V_{n-1} -normali.*
 Vincensini P., *Sulle reti e le congruenze (ω)*
 Haantjes J., *Sulla geometria infinitesimale degli spazi metrici.*
 Lichnerowicz A., *Generalizzazioni della Geometria kähleriana globale.*
 Bompiani E., *Geometrie riemanniane di specie superiore.*
 Hlavaty V., *Geometria differenziale di contatto.*
 Kuiper N. H., *Sulle proprietà conformi degli spazi di Einstein.*
 Simonart F., *Il teorema fondamentale della Geometria dei tessuti.*
 Van Bouchout V., *Le linee esagonali nei tessuti di superficie.*
 Backes F., *Il metodo del pentasfera obliquo mobile e le sue applicazioni.*

- Godeaux L., *Sulle superficie associate ad una successione di Laplace chiusa.*
 Rozet O., *Sulle congruenze di rette non W.*
 Debever R., *Gli spazi dell'elettromagnetismo.*

Secondo Colloquio di Geometria algebrica:

- Chisini O., *Curve di diramazione dei piani multipli e trecce algebriche.*
 Gauthier L., *Alcuni lavori recenti riguardanti la classificazione delle curve algebriche.*
 Villa M., *Trasformazioni puntuali e trasformazioni cremoniane.*
 Kähler E., *Sulla teoria dei corpi algebrici.*
 Dolbeault P., *Forme differenziali meromorfe sulle varietà kähleriane compatte.*
 Conforto F., *Problemi risolti e non risolti della teoria delle funzioni abeliane nei suoi rapporti con la geometria algebrica.*
 Andreotti A., *Problemi di classificazione nella teoria delle superficie algebriche irregolari.*
 Néron A., *La teoria della base per i divisori sulle varietà algebriche.*
 Gröbner W., *La teoria degli ideali e la Geometria algebrica.*
 Gaeta F., *Alcuni progressi recenti nella classificazione delle varietà algebriche di uno spazio proiettivo.*
 Burniat P., *Modelli di superficie canoniche normali di S_3 e di genere lineare $11 \leq p^{(1)} \leq 17$.*
 Nollet L., *Introduzione delle curve quasi irriducibili di una superficie algebrica. Applicazione alla regolarità di certi sistemi lineari.*
 Godeaux L., *Le singolarità dei punti di diramazione isolati delle superficie multiple.*

All'inizio dei quattro volumi sono pubblicate le belle allocuzioni, spesso piene di simpatia per la Geometria italiana, pronunciate dal Presidente del Centro prof. Godeaux in occasione dell'apertura dei vari Colloqui. Anche la veste tipografica dei quattro volumi è eccellente.

MARIO VILLA

N. W. MCLACHLAN: *Complex Variable Theory and Transform Calculus with Technical Applications* - Second Edition, Cambridge University Press, 1953; pp. XI + 388; 55 s.

La seconda edizione di questo volume contiene vari rifacimenti e aggiornamenti della prima edizione, apparsa nel 1939 col titolo *Complex Variable and Operational Calculus with Technical Applications* (pp. XI + 355).

La Parte I sulle funzioni di una variabile complessa, la Parte II sull'inversione di Mellin della trasformata p di Laplace di $f(t)$, $\Phi(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$, mediante un integrale esteso ad un contorno di Bromwich, e un'appendice, hanno carattere introduttivo: per i matematici puri ai quali, come avverte l'A., il volume non è destinato, queste parti formano nel loro insieme un utile richiamo, ma riescono forse troppo schematiche per i tecnici ai quali l'A. ha dedicato da un ventennio la sua feconda operosità di trattatista.

La Parte III, la più interessante del volume, riguarda alcune applicazioni della trasformata p di Laplace ai circuiti elettrici, ai sistemi oscillanti, alla

dinamica degli aereoplani, alla flessione delle sbarre, ai radio-ricevitori, alle linee di trasmissione elettrica e ai cavi, ai filtri elettrici, ai solenoidi con armatura metallica, ai microfoni condensatori, agli altoparlanti, ai problemi di conduzione e di assorbimento del calore.

Si tratta di una significativa raccolta di problemi che conducono ad equazioni lineari sulle quali, operando con la trasformazione p di Laplace, e tenendo conto delle condizioni iniziali e ai limiti, si perviene ad espressioni integrali formate con la funzione incognita ed invertibili con la formula di Mellin.

Una tabella di trasformate p di Laplace riportata nell'Appendice 10 consente la risoluzione effettiva di altre estese classi di equazioni differenziali lineari.

Ben 108 figure illustrano il volume, un indice tecnologico ne facilita la lettura e un elenco aggiornato di Opere e di memorie originali indica allo studioso le fonti per approfondire la letteratura della materia.

Il volume è nel complesso un assai utile strumento per gli ingegneri per i quali i matematici puri hanno elaborato in quest'ultimo trentennio tanti procedimenti teorici e numerici atti a rispondere alle esigenze loro imposte dall'alto livello di perfezione raggiunto dalla tecnica.

GIOVANNI SANSONE

- C. KURATOWSKI, *Topologie*, volume I [« Monografie Matematyczne », tomo XX, Varsavia 1952, 3^a ed.], pagg. XI-450;
 C. KURATOWSKI, *Topologie*, volume II [« Monografie Matematyczne », tomo XXI, Varsavia 1952, 2^a ed.], pagg. VIII-443.

Questi due volumi costituiscono un'unica vasta opera, sebbene siano in due edizioni diverse e presentino delle piccole sovrapposizioni parziali nello sviluppo della materia. Essi pongono una ampia esposizione della topologia, trattata quasi esclusivamente, con metodo assiomatico, dal punto di vista della teoria degli insiemi.

Il trattato è diviso complessivamente in nove lunghi capitoli, preceduti da una introduzione, nella quale sono riassunte rapidamente le operazioni algebriche della logica e della teoria degli insiemi ed alcune altre nozioni fondamentali. Il simbolismo delle operazioni logiche è continuamente sfruttato, insieme con quello delle operazioni su insiemi, nel corso del trattato; ed in certi problemi esso fornisce un mezzo espressivo di concisione singolare: si veggano per esempio le determinazioni delle classi di alcuni insiemi boreliani (vol. I, pagg. 269-280) e la dimostrazione (ibidem, pagg. 369-377) dell'invarianza delle classi proiettive, diverse da quelle degli insiemi boreliani e dei complementari analitici, di fronte alla classica operazione di Souslin. La intelligenza dell'opera richiede, oltre le nozioni riassunte in quella introduzione, una certa familiarità con quelle di tipo ordinale, di numero transfinito... E l'opera studia gli spazi topologici, particolarizzando sempre più, nel suo decorso, la natura degli spazi considerati. Il primo capitolo è dedicato agli spazi topologici; il secondo a quelli metricizzabili e separabili; il terzo agli spazi completi; il quarto, il quinto, il sesto e il settimo rispettivamente agli spazi compatti, connessi, localmente connessi e contrattili; il nono al piano euclideo. Il capitolo ottavo è dedicato invece ad alcune considerazioni di carattere geometrico-grupale: lo studio di uno spazio topologico vi è condotto attraverso

lo studio di alcuni gruppi costruiti con le funzioni continue nello spazio, ed assumenti ivi o soltanto valori interi, o soltanto valori complessi di modulo unitario oppure soltanto valori complessi non nulli; si ritrovano, nel caso che lo spazio sia un politopo, frammenti di risultati classici della topologia combinatoria.

Ogni capitolo e l'introduzione sono divisi in paragrafi, numerati progressivamente. Si tratta di 55 paragrafi. Gli argomenti di questi paragrafi, insieme con qualche notizia ulteriore, valgono a dare un'idea della vastità dell'opera e della sua ampiezza di informazione:

Introduzione: operazioni della logica e della teoria degli insiemi; prodotti cartesiani; funzioni;

Capitolo I: sistemi di assiomi e regole di calcolo topologico; insiemi chiusi ed insiemi aperti; frontiera ed interno di un insieme; intorno di un punto e localizzazione di una proprietà; insiemi densi e frontiera, insiemi ovunque non densi; punti d'accumulazione; insiemi di prima categoria; proprietà di Baire; serie alternate di insiemi chiusi; continuità ed omeomorfia;

Capitolo II: spazi provvisti della nozione di limite; spazi metrici; l'assioma della separazione; l'assioma della base; potenza di uno spazio e punti di condensazione; potenza di alcune famiglie di insiemi; definizione topologica di dimensione e proprietà generali; spazi 0-dimensionali; spazi n -dimensionali; semplici, complessi e politopi; prodotti cartesiani; prodotti cartesiani numerabili; limiti inferiore e superiore di una successione di insiemi; insiemi boreliani; funzioni misurabili secondo Borel; funzioni che godono della proprietà di Baire;

Capitolo III: definizioni e considerazioni generali sugli spazi completi; successioni di insiemi e teorema di Baire sugli insiemi di prima categoria; prolungamento di una funzione; relazioni fra gli spazi completi separabili e l'insieme dei numeri irrazionali; insiemi boreliani negli spazi completi e separabili; insiemi proiettivi; insiemi analitici; spazi totalmente imperfetti ed altri spazi singolari;

Capitolo IV (il primo del secondo volume): la nozione di compattezza; lo spazio dei sottoinsiemi chiusi di uno spazio dato e quello delle trasformazioni continue di un certo spazio in un altro spazio dato; funzioni e decomposizioni semicontinue; problemi della teoria della dimensione;

Capitolo V: la nozione di connessione; continui; spazi irriducibili e spazi indecomponibili;

Capitolo VI: la nozione di connessione locale; continui localmente connessi; la teoria delle curve e l'ordine di uno spazio in un punto; decomposizione di un continuo localmente connesso in elementi ciclici;

Capitolo VII: prolungamento delle funzioni continue e retrazione; omotopia e contrattilità;

Capitolo VIII: il gruppo delle funzioni continue in uno spazio ed assumenti ivi soltanto valori interi (il fattoriale di questo e del gruppo additivo dei numeri interi è isomorfo, nel caso di un politopo, al primo gruppo ridotto di Betti); i gruppi delle funzioni continue in uno spazio ed assumenti ivi valori complessi di modulo unitario oppure non nulli; spazi contrattili rispetto alla circonferenza e spazi unicoerenti;

Capitolo IX: generalità sugli spazi reali a n dimensioni; la superficie sferica, problemi qualitativi; la superficie sferica, problemi quantitativi, studio del gruppo delle funzioni continue a valori complessi e giammai nulli.

Abbiamo quindi, specie nel primo volume, accanto ad argomenti di carattere spiccatamente geometrico, altri, che traggono la loro origine da questioni

di teoria delle funzioni di variabile reale, pur essendo topologici. Topologiche sono, per esempio, sia la nozione di insieme di prima categoria, data da Baire, che quella di insiemi di Borel ⁽¹⁾, introdotta nello studio del problema metrico della misura; e lo studio degli insiemi di prima categoria, dei loro complementari (i residuali), degli insiemi che godono della proprietà di Baire (ottenuti dagli insiemi aperti mediante addizione e sottrazione di insiemi di prima categoria), degli insiemi boreliani, analitici e proiettivi appartiene alla topologia; e appartiene alla topologia anche lo studio delle funzioni misurabili secondo Borel, delle funzioni che godono della proprietà di Baire, ecc., considerate per valori delle variabili indipendente e dipendente contenuti in spazi topologici. Piuttosto può suscitare meraviglia qualche analogia che si presenta con la teoria della misura, analogia nella quale il ruolo degli insiemi di misura nulla è assunto dagli insiemi di prima categoria: così la proprietà utilizzata per definire gli insiemi di Baire presenta delle analogie con quella, posseduta dagli insiemi misurabili secondo Lebesgue, di essere pensabili come insiemi boreliani, previa l'addizione e la sottrazione di insiemi di misura nulla; e il fatto (volume I, pagg. 222-225) che le sezioni con le verticali di un insieme piano di Baire siano insiemi di Baire lineari, se si prescinde da un insieme di prima categoria di verticali, presenta analogie singolari, ricordate anche dall'Autore, con risultati classici della teoria della misura.

Fra i paragrafi di contenuto spiccatamente geometrico, ricordiamo quelli sulla teoria della dimensione, affascinanti per la bellezza dei risultati; quello sui semplici complessi e politopi, che contiene il « lemma » di Sperner, insieme con le sue importanti conseguenze, come la dimostrazione di Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz per il teorema di Brouwer sull'esistenza di punti uniti nelle trasformazioni univoche e continue dell'elemento n -dimensionale in proprie porzioni; quello sui continui, che contiene caratterizzazioni topologiche delle curve semplici aperte e chiuse; quello sugli spazi indecomponibili, implicitamente scoperti da Brouwer nel costruire tre regioni del piano aventi la stessa frontiera e studiati a fondo dall'Autore e da Knaster; quello sui continui localmente connessi, equivalenti perciò alle immagini continue di un segmento, secondo un teorema di Hahn-Mazurkiewicz-Sierpinski che estende un risultato celebre di Peano; quello sulla teoria delle curve nell'indirizzo di Menger; quelli sulla retrazione lomotopia e la contrattilità, che porgono gli strumenti per i risultati degli ultimi due capitoli. Qualche cenno sul contenuto del penultimo capitolo è stato già dato. L'ultimo capitolo, dopo alcuni teoremi sugli spazi reali euclidei pluridimensionali, si volge allo studio della topologia piana, nella quale « les méthodes ensemblistes... ont remporté un triomphe complet »: insieme coi risultati classici viene esposta la caratterizzazione topologica della superficie della sfera e viene studiata la topologia piana attraverso l'esame del gruppo delle funzioni continue nel piano, assumenti ivi valori complessi giammai nulli; questo indirizzo, inaugurato da Borsuk ed Eilenberg, conduce a scoprire il contenuto topologico dei teoremi di Weierstrass sulla decomposizione di una trascendente intera in fattori e del teorema di Rouché sul numero algebrico degli zeri di una funzione olomorfa.

L'esposizione non è forse sempre agile, ma è certo sempre chiara per un lettore sufficientemente preparato.

GIUSEPPE SCORZA DRAGONI

(1) Rispetto agli spazi metrici completi, la nozione di insieme di Borel è addirittura (volume I, pag. 339) un invariante intrinseco.

L. DE BROGLIE: *Éléments de théorie des quanta et de mécanique ondulatoire* - Paris, Gautier-Villars, 1953.

Il volume, come l'autore stesso chiarisce nella prefazione, riproduce l'essenziale delle lezioni tenute da un ventennio alla « École Normale Supérieure » di Parigi per gli aspiranti al certificato in Teorie Fisiche.

Esso ha per scopo di mostrare agli studenti in possesso delle cognizioni proprie ai corsi fondamentali di Fisica quali siano i più importanti sviluppi della Fisica Moderna e quali i nuovi concetti introdotti. Il volume infatti contiene una rassegna di numerosi argomenti: partendo da un cenno sulla teoria di Maxwell e di Lorentz e sulla relatività ristretta, continua con la meccanica statistica, la teoria della luce, la vecchia teoria dei quanti, e giunge infine a trattare la meccanica ondulatoria, la meccanica delle matrici, la teoria di Dirac, la meccanica dei sistemi di particelle e le statistiche quantistiche. Il tutto in circa 300 pagine.

Gli argomenti sono esposti in modo semplice ed elegante, corredati talvolta di brevi ma sufficienti richiami storici, e gli sviluppi analitici sono sempre seguibili con facilità. Il carattere della trattazione è sostanzialmente espositivo: d'altra parte il gran numero di argomenti svolti non permette un approfondimento critico delle varie questioni. Si desidererebbe, anche qui, come in moltissimi altri testi con analoghi intendimenti, un maggior riferimento a quelli che sono i risultati più recenti della fisica, generalmente solo accennati. Comunque il volume può essere utilmente letto dagli studenti dei corsi Universitari e servire alla loro preparazione culturale.

GIAMPIETRO PUPPI

LIBRI RICEVUTI

Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. Band I. Algebra und Zahlentheorie:

Art. 6 - G. PICKERT, *Lineare Algebra*, pp. 43.

Art. 7 - G. PICKERT, *Normalformen von Matrizen*, pp. 29.

Art. 16 - W. MAAK, *Darstellungstheorie unendlicher Gruppen und fast-periodische Funktionen*, pp. 26.

Art. 19 - P. FURTWANGLER, *Allgemeine Theorie der algebraischen Zahlen*, pp. 50.

B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1953.

M. PIAZZOLLA BELOCH, *Geometria descrittiva*, pp. 462, Pubblicazioni dell'Istituto di Geometria dell'Università di Ferrara, 1953.

R. ROTHE, *Hohere Mathematik*, Teil III, pp. 242, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1953.

M. G. SALVADORI, *La risoluzione matematica dei problemi della tecnica*, pp. 265, Sansoni Edizioni Scientifiche, Firenze, 1953.