Bollettino Unione Matematica Italiana

Tommaso Boggio

Sulla funzione potenziale di un doppio strato in un campo sferico o circolare.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.3, p. 229–235.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_3_229_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sulla funzione potenziale di un doppio strato in un campo sferico o circolare.

Nota di TOMMASO BOGGIO (a Torino)

Sunto. - *Viene data un'espressione assai semplice, con quadrature, del primo e secondo potenziale di un doppio strato, disteso sopra una superficie sferica, o sopra una circonferenza, nell'ipotesi che la densità sia rappresentata da una funzione armonica.*

In lavori precedenti [1] ho studiato il primo e secondo potenziale di uno strato semplice, disteso sopra una superficie sferica o sopra una circonferenza, ottenendo espressioni semplici, con quadrature, nel caso che la densità coincida, nei punti del contorno, con una data funzione armonica.

Ora, con calcoli analoghi, determino la funzione potenziale di un doppio strato disteso sopra una superficie sferica, o sopra una circonferenza, supponendo che la densità coincida con una funzione armonica data. Le formule che ottengo sono assai semplici ed espresse con quadrature.

In particolare, se la densità è rappresentata da un polinomio armonico e omogeneo, la funzione potenziale, nei punti interni alla sfera risulta proporzionale al polinomio stesso.

---

[1] T. BOGGIO: *a) Trasformazione di alcune funzioni potenziali*, « Rendiconti Circolo Matematico di Palermo », t.XXII, pp. 220-232, 1906; *b) Sui potenziali poliarmonici di uno strato semplice, ecc.*, « Quaderno scientifico del Convegno di Modena », pp. 23-28, 1952.

1. La funzione potenziale W di un doppio strato, disteso su una superficie σ, con densità u, è data dall'integrale doppio

$$W = \int_\sigma u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma,$$

ove r è la distanza di un punto M variabile su σ, da un punto qualunque P dello spazio e la derivata secondo la normale interna è calcolata in M.

Tale funzione è armonica in tutto lo spazio.

Nel caso di una superficie sferica, di raggio R, e nell'ipotesi fatta sulla densità u, la funzione W può rappresentarsi con un integrale semplice.

Osserviamo, per questo, che se W_i e W_e sono i valori di W nei punti interni ed esterni alla sfera, si ha, nei punti di σ, la nota discontinuità:

$$W_i - W_e = 4\pi u, \quad (\text{su } \sigma). \tag{1}$$

Consideriamo poi la funzione armonica V_i definita entro la sfera dalla formula:

$$V_i = W_i - 4\pi F, \tag{2}$$

ove F è la funzione armonica nella sfera e che su σ coincide con u; si ha allora dalla (1):

$$V_i = W_e, \quad (\text{su } \sigma). \tag{3}$$

In virtù della (3) si può applicare alle funzioni armoniche V_i e W_e una nota formula (²) e si ha

$$\frac{\partial V_i}{\partial \rho} + \frac{\partial W_e}{\partial \rho} = -\frac{1}{R} V_i, \quad (\text{su } \sigma), \quad (\rho = OP),$$

cioè, per la (2):

$$\frac{\partial (W_i - 4\pi F)}{\partial \rho} + \frac{\partial W_e}{\partial \rho} = -\frac{1}{R}(W_i - 4\pi F), \quad (\text{su } \sigma)$$

inoltre, per la continuità della derivata normale di W, si ha:

$$\frac{\partial W_i}{\partial \rho} - \frac{\partial W_e}{\partial \rho} = 0, \quad (\text{su } \sigma),$$

(²) Cfr BOGGIO, *loc. cit* (1).

e sommando colla precedente:

$$2\frac{\partial W_i}{\partial \rho} - 4\pi\frac{\partial F}{\partial \rho} = -\frac{1}{R}W_i + \frac{4\pi F}{R}, \quad (\text{su } \sigma),$$

ossia:

$$2\rho\frac{\partial}{\partial \rho}(W_i - 2\pi F) + (W_i - 2\pi F) = 2\pi F. \tag{4}$$

È chiaro che questa equazione sussiste anche in ogni punto interno alla sfera, e da essa si deduce

$$\frac{\partial}{\partial \rho}[\rho^{1/2}(W_i - 2\pi F)] = \pi\rho^{-1/2}F,$$

da cui:

$$W_i = 2\pi F + \pi\rho^{-1/2}\int_0^\rho \rho^{-1/2}F d\rho, \tag{5}$$

che dà la funzione armonica W_i in ogni punto $P(\rho, \theta, \varphi)$ interno alla sfera.

Per ottenere la funzione W_e basta applicare una ben nota proprietà della inversione per raggi vettori reciproci e allora dalle (2), (3) si deduce che il valore della funzione armonica W_e in un punto $P(\rho, \theta, \varphi)$ esterno alla sfera, è dato da:

$$W_e(\rho, \theta, \varphi) = \frac{R}{\rho}[W_i(\rho_1, \theta, \varphi) - 4\pi F(\rho_1, \theta, \varphi)], \quad \text{ove } \rho_1 = R^2/\rho.$$

Se la funzione F è un polinomio armonico, omogeneo di grado n, si può porre $W_i = kF$, ove k è una costante da determinare; infatti la (4) diventa ora:

$$2(k - 2\pi)\rho\frac{\partial F}{\partial \rho} + (k - 2\pi)F = 2\pi F,$$

e per il teorema di EULERO sulle funzioni omogenee risulta:

$$(k - 2\pi)(2n + 1)F = 2\pi F,$$

da cui $k = 4(n + 1)\pi/(2n + 1)$, perciò:

$$W_i = \frac{4(n + 1)\pi}{2n + 1}F.$$

2. Il secondo potenziale U di un doppio strato, di densità u, disteso sulla superficie σ è dato, secondo MATHIEU, da;

$$U = \int_\sigma u\frac{dr}{dn}d\sigma, \tag{6}$$

ed è una funzione biarmonica e continua in tutto lo spazio, e allora, per una proprietà dell'inversione per raggi vettori reciprocì ([3]), applicata alle funzioni biarmoniche, risulta che se $U_i(\rho, \theta, \varphi)$ è il valore della funzione U in un punto $P(\rho, \theta, \varphi)$ interno alla sfera, il valore della funzione in un punto $P(\rho, \theta, \varphi)$ esterno alla sfera è dato da:

$$(6') \qquad U_e(\rho, \theta, \varphi) = \frac{\rho}{R} U_i(\rho_1, \theta, \varphi), \qquad \text{ove } \rho_1 = R^2/\rho;$$

ne segue:

$$\frac{\partial U_e(\rho, \theta, \varphi)}{\partial \rho} = \frac{1}{R} U_i(\rho_1, \theta, \varphi) - \frac{\rho}{R} \frac{\partial U_i(\rho_1, \theta, \varphi)}{\partial \rho} \cdot \frac{R^2}{\rho^2},$$

perciò in ogni punto della superficie sferica σ vale la relazione:

$$\frac{\partial U_e}{\partial \rho} + \frac{\partial U_i}{\partial \rho} = \frac{1}{R} U_i, \quad (\text{su } \sigma),$$

e siccome le derivate prime della funzione U sono continue anche attraverso la superficie σ, si deduce la notevole relazione:

$$(7) \qquad \frac{\partial U_i}{\partial \rho} = \frac{1}{2R} U_i, \quad (\text{su } \sigma).$$

Ciò posto, si ha dalla (6):

$$\Delta_2 U = 2 \int_\sigma u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma,$$

e supposto che su σ la u coincida con una data funzione armonica F, si ha dalla (5) nei punti interni alla sfera:

$$(8) \qquad \Delta_2 U_i = 4\pi F + 2\pi\rho^{-1/2} \int_0^\rho \rho^{-1/2} F d\rho.$$

Siccome la funzione U_i è biarmonica, si può rappresentare colla nota relazione:

$$(8') \qquad U_i = H_1 + (\rho^2 - R^2) H_2,$$

([3]) V. Volterra: *Sulle funzioni poliarmoniche,* « Atti Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti », t. LVII, pp 233-235 1899. T. Boggio: *Sopra una trasformazione delle funzioni poliarmoniche,* « Id. id. t. LXVIII, pp. 309-314 , 1909 ».

ove H_1, H_2 sono funzioni armoniche da determinare; ne segue:

$$\Delta_2 U_i = 6H_2 + 4\rho \frac{\partial H_2}{\partial \rho},$$

e confrontando colla (8) si deduce:

$$\frac{3}{2} H_2 + \rho \frac{\partial H_2}{\partial \rho} = \pi F + \frac{1}{2} \pi \rho^{-1/2} \int_0^\rho \rho^{-1/2} F d\rho,$$

da cui:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^{3/2} H_2) = \pi \rho^{1/2} F + \frac{1}{2} \pi \int_0^\rho \rho^{-1/2} F d\rho,$$

e se ne deduce

$$\rho^{3/2} H_2 = \pi \int_0^\rho \rho^{1/2} F d\rho + \frac{1}{2} \pi \int_0^\rho \left[\int_0^\rho \rho^{-1/2} F d\rho \right] d\rho,$$

con un'integrazione per parti si ricava ancora

$$H_2 = \frac{1}{2} \pi \left\{ \rho^{-1/2} \int_0^\rho \rho^{-1/2} F d\rho + \rho^{-3/2} \int_0^\rho \rho^{1/2} F d\rho \right\}.$$

La funzione armonica H_1 si determina poi con un noto procedimento [4], che qui non è il caso di riportare, dopo di che la (8') ci darà la funzione cercata U_i, e poscia la (6') ci dà poi la U_e.

3. Consideriamo la funzione potenziale logaritmica di un doppio strato, disteso sopra una curva piana s, con densità u; essa è data da:

$$U = \int_s u \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} ds; \tag{9}$$

supposto che s sia una circonferenza di raggio R, e che la densità u coincida, nei punti di s, con una funzione armonica F, la funzione U può rappresentarsi con un'altra quadratura più semplice.

Osserviamo, per questo, che invece della (1) sussiste la relazione:

$$U_i - U_e = 2\pi u, \quad (\text{su } s), \tag{10}$$

e se si considera la funzione armonica V_i definita entro il cerchio σ

limitato da s, dalla formula:

(11) $$V_i = U_i - 2\pi F,$$

si deduce, dalla (10):

(12) $$V_i = U_e, \quad (\text{su } s),$$

e di qui, applicando una nota formula ([4]), si ha:

$$\frac{\partial V_i}{\partial \rho} + \frac{\partial U_e}{\partial \rho} = 0, \quad (\text{su } s),$$

cioè, per la (11):

$$\frac{\partial U_i}{\partial \rho} - 2\pi \frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{\partial U_e}{\partial \rho} = 0. \quad (\text{su } s),$$

inoltre, per la continuità della derivata normale di U si ha:

$$\frac{\partial U_i}{\partial \rho} - \frac{\partial U_e}{\partial \rho} = 0, \quad (\text{su } s).$$

e sommando colla precedente si può scrivere:

(13) $$\rho \frac{\partial (U_i - \pi F)}{\partial \rho} = 0,$$

e quest'equazione sussiste pure in ogni punto del cerchio σ; ne segue:

$$U_i - \pi F = c,$$

ove c è una costante; ma se $U_i(O)$ e F_0 rappresentano i valori delle funzioni U_i e F nel centro O del cerchio σ, è chiaro che $c = U_i(O) - F_0$, perciò si ha:

$$U_i - \pi F = U_i(O) - \pi F_0;$$

d'altra parte, per il teorema della media sulle funzioni armoniche, si ha:

$$F_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u d\theta,$$

ove θ è l'argomento di un punto variabile su s; inoltre dalla (9) si deduce tosto:

$$U_i(O) = \int_0^{2\pi} u d\theta,$$

perciò risulta:

$$U_i = \pi F + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} u d\theta = \pi(F + F_0),$$

che ci dà la funzione U_i in ogni punto del cerchio σ.

([4]) BOGGIO, *loc. cit.* (1).

Per ottenere la U_e basta applicare una ben nota proprietà dell'inversione per raggi vettori reciproci e allora dalle (11), (12) si deduce che il valore della funzione U_e in un punto $P(\rho, \theta)$ esterno al cerchio è dato da:

$$U_e(\rho, \theta) = U_i(\rho_1, \theta) - 2\pi F(\rho_1, \theta), \quad \text{ove } \rho_1 = R^2/\rho.$$

In particolare, se la F è un polinomio armonico omogeneo di grado n, avendosi $F_0 = 0$, si ha senz'altro: $U_i = \pi F$.

Si può, in modo analogo, trasformare l'espressione del secondo potenziale logaritmico di un doppio strato, disteso sopra la circonferenza s.