BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ROCCO SERINI

Risultante e momento risultante delle azioni capillari su un pezzo di superficie.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.3, p. 235–236.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_3_235_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

Risultante e momento risultante delle azioni capillari su un pezzo di superficie.

Nota di ROCCO SERINI (a Pavia)

Sunto. - *Si dimostrano in modo semplicissimo col calcolo tensoriale sulla superficie i teoremi di* LAPLACE *già ottenuti con altro metodo* (1).

Sia S un pezzo di superficie, C il suo contorno, n il versore della normale esterna a C su S. Diciamo n^r $(r = 1, 2, 3)$ le componenti di n rispetto ad un riferimento cartesiano e n^α $(\alpha = 1, 2)$ le componenti di n rispetto a un riferimento sulla superficie: si ha allora

$$n^r = n^\alpha \frac{\partial x^r}{\partial u^\alpha} = n^\alpha x^r_{/\alpha}$$

essendo u^α $(\alpha = 1, 2)$ le coordinate sulla superficie. Ora il risultante delle azioni capillari su C è (a prescindere da una costante K a moltiplicatore)

$$\int_C n^r ds = \int_C x^r_{/\alpha} n^\alpha ds,$$

(1) Vedi su questo Boll. Serie 2^a, vol. III, pp. 207-210, 1941, la nota collo stesso titolo, a cui si rimanda.

e per il teorema di GAUSS [2] vale

$$\int_S (x^r_{/\alpha})^{/\alpha} dS.$$

Ora se $a^{\alpha\beta}$ sono, sotto forma controvariante, i coefficienti della prima forma differenziale della superficie si ha

$$x^{r/\alpha}_{/\alpha} = a^{\alpha\beta} x^r_{/\alpha\beta}\,.$$

D'altra parte se $b_{\alpha\beta}$ sono i coefficienti della seconda forma differenziale della superficie si ha per le formule di WEINGARTEN

$$x^r_{/\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} N^r$$

essendo N^r le componenti spaziali del versore normale alla superficie.

Ne viene

$$\int_C n^r ds = \int_S a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} N^r dS$$

Ma l'invariante $a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}$ è eguale alla somma $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ quindi il teorema del risultante è dimostrato.

Quanto al momento risultante rispetto alla origine (punto arbitrario) esso vale, se ε_{rst} è il tensore di RICCI,

$$\int_C \varepsilon_{rst} x^s n^t ds = \int_C \varepsilon_{rst} x^s x^t{}_{/\alpha} n^\alpha ds = \int_S (\varepsilon_{rst} x^s x^t{}_{/\alpha})^{/\alpha} dS = \int_S \varepsilon_{rst} a^{\alpha\beta} (x^s x^t{}_{/\alpha})_{/\beta} dS =$$

$$= \int_S \varepsilon_{rst} a^{\alpha\beta} x^s{}_{/\beta} x^t{}_{/\alpha} dS + \int_S \varepsilon_{rst} a^{\alpha\beta} x^s x^t{}_{/\alpha\beta} dS.$$

Il primo integrale è nullo per la emisimmetria di ε_{rst} mentre il secondo, per le formole di WEINGARTEN, diventa

$$\int_S \varepsilon_{rst} x^s a^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} N^r dS,$$

e quindi dato il valore dell'invariante $a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta}$ è dimostrato il teorema del momento.

[2] Vedi per le notazioni e i teoremi: MC. CONNEL, *Applications of the absolute differential calculus*, Cap. XI, Blackie and Son. London, 1931.