Bollettino Unione Matematica Italiana

Rocco Serini

Adiabaticità nel movimento dei gas perfetti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.3, p. 241–243.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_3_241_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

Adiabaticità nel movimento dei gas perfetti.

Nota di ROCCO SERINI (a Pavia)

Sunto. - *Si dimostra che nel movimento dei gas perfetti, supposta trascurabile la conducibilità, la relazione complementare è quella adiabatica.*

Le equazioni indefinite del movimento di un fluido perfetto sono notoriamente (μ densità, p pressione, F_i forza riferita alla unità di massa, v_i velocità, a_i accelerazione ([1])).

$$\frac{D\mu}{Dt} + \mu v^i{}_{/i} = 0, \quad \text{(eq. di continuità)} \tag{1}$$

$$\mu a_i = \mu F_i - p_i, \tag{2}$$

alle quali va aggiunta l'equazione di stato

$$f(p,\ \mu,\ T) = 0, \tag{3}$$

che lega densità pressione e temperatura (assoluta) T. È noto che manca una equazione per rendere determinato il problema nelle sei incognite p, a_i, μ, T.

Questa equazione si deve dedurre dalla termodinamica. Isoliamo perciò una porzione τ del fluido e seguiamola nel suo movimento. Il teorema della energia asserisce allora che:
variazione della energia cinetica + variazione energia interna = calore assorbito dal sistema + lavoro delle forze esterne.

La variazione della energia cinetica nel tempuscolo dt è

$$dt \frac{D}{Dt}\int_\tau \frac{1}{2}\mu v^i v_i d\tau,$$

intendendosi per $\frac{D}{Dt}$ la derivata sostanziale. Ora per l'integrale di una funzione f:

$$\frac{D}{Dt}\int_\tau f d\tau = \int_\tau \left(\frac{Df}{Dt} + f v^j{}_{/j}\right) d\tau,$$

(1) Vedi p. es. FINZI-PASTORI, *Calcolo tensoriale*, Bologna, Zanichelli, 1949.

e perciò la variazione della energia cinetica è

$$dt\int_\tau \left(\mu a_i v^i + \frac{1}{2} v^i v_i \frac{D\mu}{Dt} + \frac{1}{2}\mu v^i v_i v^j{}_{/j}\right) d\tau$$

che si riduce a

$$dt\int_\tau \mu a_i v^i d\tau,$$

perchè gli ultimi due termini scompaiono per la (1).

Limitiamoci ora a considerare un gas perfetto. Allora è noto che la variazione di energia intrinseca è

$$\int_\tau \mu c_v D T d\tau$$

essendo DT l'aumento di temperatura e c_v il calore specifico a volume costante: questo si può ritenere costante.

Il calore assorbito dal sistema è quello che entra per conduzione attraverso la superficie σ di τ perchè, dato che noi seguiamo il sistema nel suo movimento, non dobbiamo considerare calore entrato per convezione.

Per i gas perfetti il coefficiente di conducibilità interna è molto piccolo quindi potremo trascurare il calore assorbito.

Quanto al lavoro fatto dalle forze esterne esso è dovuto alle forze di massa e alla pressione p e vale

$$dt\int_\tau \mu F_i v^i d\tau + dt\int_\sigma p n_i v^i d\sigma,$$

siccome $v^i dt$ è lo spostamento del punto generico (n_i è il versore della normale interna alla σ).

L'ultimo termine trasformato col teorema di Gauss diventa

$$- dt\int_\tau (p v^i)_{/i} d\tau = - dt\int_\tau p_i v^i d\tau - dt\int_\tau p v^i{}_{/i} d\tau.$$

Siamo ora in grado di mettere in equazione il nostro bilancio della energia e otteniamo

$$dt\int_\tau \mu a_i v^i d\tau + \int_\tau \mu c_v D T d\tau = dt\int_\tau \mu F_i v^i dt - dt\int_\tau p_i v^i d\tau - dt\int_\tau p v^i{}_{/i} d\tau.$$

Tenendo conto delle (2) ci riduciamo alla relazione

$$\int_\tau \mu c_v D T d\tau = - dt \int_\tau p v^i_{/i} d\tau.$$

Ora siccome il volume τ è arbitrario e la funzione integranda si deve supporre continua ne viene

$$\mu c_v D T = - dt p v^i_{/i} :$$

tenendo conto della (1) ci riduciamo alla relazione

$$(*) \qquad \mu c_v D T = p \frac{D\mu}{\mu}.$$

Ora per un gas perfetto l'equazione di stato (3) è

$$(3') \qquad p = \frac{R}{m} \mu T$$

dove R è la costante dei gas e m il peso molecolare. Si deduce

$$\mu D T = \frac{m}{R} Dp - T D\mu = \frac{m}{R} Dp - \frac{m}{R} \frac{p}{\mu} D\mu,$$

dimodochè la (*) diventa

$$(*)' \qquad \frac{m}{R} c_v Dp = \frac{p}{\mu}\left(\frac{m}{R} c_v + 1\right) Dp.$$

Ricordando la relazione di MAYER (c_p calore specifico a pressione costante)

$$m c_p - m c_v = R$$

e posto come uso

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v},$$

la (*)' diventa

$$\frac{Dp}{p} = \gamma \frac{D\mu}{\mu} :$$

questa integrata dà

$$p = C \mu^\gamma, \qquad (C \text{ costante})$$

che è l'equazione delle adiabatiche.