
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

BRUNO PINI

Su un integrale analogo al potenziale logaritmico.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. 9
(1954), n.3, p. 244–250.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_3_244_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Su un integrale analogo al potenziale logaritmico.

Nota di BRUNO PINI (a Cagliari)

Sunto. - Si introduce un operatore \mathfrak{N}^* che generalizza l'operatore $\mathfrak{N} = \partial^2/\partial x^2 + \partial/\partial y$ e si considera l'equazione $\mathfrak{N}^*(u) = f$ con f funzione sommabile con una certa potenza.

È noto che se $f(P)$ ⁽¹⁾ è una funzione continua sul dominio D ma non verifica punto per punto una condizione di HÖLDER, il potenziale

$$u(P) = -\frac{1}{2\pi} \iint_D \lg(1/\overline{PQ}) f(Q) dQ$$

anzichè soddisfare l'equazione

$$\Delta u = f$$

ove Δ è il laplaciano ordinario, verifica l'equazione

$$\Delta^* u = f$$

ove Δ^* è l'operatore di ZAREMBA ⁽²⁾ definito da

$$\Delta^* u = \lim_{h \rightarrow 0} [u(x+h, y) + u(x, y+h) + u(x-h, y) + u(x, y-h) - 4u(x, y)]/h^2.$$

È stato dimostrato ⁽³⁾ che, analogamente, la funzione

$$(1) \quad u(P) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_R U(P, Q) f(Q) dQ \quad R: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1,$$

⁽¹⁾ Conveniamo di indicare costantemente con P il punto (x, y) e con Q il punto (ξ, η) .

⁽²⁾ S. ZAREMBA, *Contribution à la théorie d'une équation fonctionnelle de la physique*, « Rend. Circolo Mat. », Palermo, 19 (1905). La prima generalizzazione del laplaciano è però dovuta ad H. PETRINI, *Démonstration générale de l'équation de Poisson $\Delta u = -4\pi\rho$ en ne supposant que ρ soit continue*, Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akad. Förhandlingar (1889); l'operatore generalizzato ivi considerato, se in due variabili, è

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} \{ [u_x(x+h, y) - u_x(x, y)]/h + [u_y(x, y+k) - u_y(x, y)]/k \}.$$

⁽³⁾ P. HARTMAN and A. WINTNER, *On the inverse of the parabolic differential operator $\partial^2/\partial x^2 - \partial/\partial t$* , « Amer. J. Math. Soc. », LXXV (1953).

ove

$$U(P, Q) = \begin{cases} (y - \eta)^{-1/2} \exp [- (x - \xi)^2 / 4(y - \eta)] & \text{per } y > \eta \\ 0 & \text{» } y \leq \eta, \end{cases}$$

se $f(P)$ si suppone soltanto continua, anzichè soddisfare l'equazione

$$\Delta(u) = \partial^2 u / \partial x^2 - \partial u / \partial y = f,$$

soddisfa l'equazione

$$\Delta^*(u) = f$$

ove

$$\Delta^*(u) = \lim_{h \rightarrow 0} \{ u(x + h, y) - 2u(x, y) + u(x - h, y) - \\ - [u(x, y) - u(x, y - h^2)] / h^2 \} \quad (4).$$

D'altra parte un altro modo molto naturale di generalizzare il laplaciano consiste nel sostituire all'operatore di LAPLACE l'operatore di BLASCHKE oppure quello di PRIVALOFF.

Ponendosi in uno spazio tridimensionale (ma il ragionamento è valido in generale), indicando con $m(u; r, P)$ ed $M(u; r, P)$ le medie della funzione u fatte rispettivamente sulla superficie sferica e sulla sfera di centro P e raggio r , SAKS ⁽⁵⁾ ha provato che se u è una funzione subarmonica in un insieme aperto G e σ è la corrispondente distribuzione di masse, allora

$$\lim_{r \rightarrow 0} [M(u; r, P) - u(P)] / \frac{2}{5} \pi r^2 = \\ = \lim_{r \rightarrow 0} [m(u; r, P) - u(P)] / \frac{2}{3} \pi r^2 = D_{sim} \sigma(P)$$

in ogni punto P in cui esiste la derivata simmetrica

$$D_{sim} \sigma(P) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{4}{3} \pi r^3} \int_{S(P, r)} d\sigma(Q),$$

essendo $S(P, r)$ la sfera di centro P e raggio r .

(4) Un operatore che generalizza quello dell'equazione del calore, anteriormente agli A. A. citati in (3), è stato considerato da M. GÉVREY, *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique*, « Journ. de Math. », s. 6, 9 (1913); precisamente il seguente

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} \{ [u_x(x + h, y) - u_x(x, y)] / h - [u(x, y + k) - u(x, y)] / k \}.$$

(5) S. SAKS, *On the operators of Blaschke and Privaloff for subharmonic functions*, « Rec. Math. (Mat. Sbornik) », 9 (1941). I. PRIVALOFF, *On a theorem of S. Saks*, id. id. Cfr. anche D. H. POTTS, *A note on the operators of Blaschke and Privaloff*, « Bull. of the Amer. Math. Soc. », (1948).

Nella presente Nota vogliamo mostrare come per la funzione (1) si possa stabilire un risultato simile a quello di SAKS; usando il ragionamento col quale PRIVALOFF ha ritrovato il risultato di SAKS, non v'è bisogno di fare su $u(P)$ l'ipotesi della subarmonicità (o analoga nel caso parabolico); anzi il risultato in questo caso discende da quello generale tenendo presente il teorema di RIESZ sulla struttura di una funzione subarmonica.

1. Poniamo

$$(2) \quad \mathfrak{N}(u) = \delta^2 u / \partial x^2 + \partial u / \partial y$$

tutte le volte che $u(P)$ è dotata delle derivate indicate. Detta $\mathfrak{C}(P, r)$ la curva

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = x + r\sqrt{2} \operatorname{sen} \theta \sqrt{\lg(1/\operatorname{sen}^2 \theta)} \\ \eta = y + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{array} \right. \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2 \quad (r > 0)$$

e $\mathfrak{D}(P, r)$ il dominio limitato da essa individuato, poniamo

$$\begin{aligned} \mu_0(u, P, r) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (u)_{\mathfrak{C}(P, r)} \cos \theta \sqrt{\lg(1/\operatorname{sen}^2 \theta)} d\theta \\ \mu_1(u, P, r) &= \frac{2}{r^2} \int_0^r \mu_0(u, P, \rho) \rho d\rho, \end{aligned}$$

nell'ipotesi che gl'integrali scritti abbiano significato.

Cominciamo col provare che:

La media periferica di $U(Q, P)$ soddisfa la seguente relazione

$$(4) \quad \mu_0(U(Q, P), P_0, r) = \begin{cases} U(Q, P_0) & \text{se } Q \text{ è esterno a } \mathfrak{D}(P_0, r) \\ 1/r & \text{» » appartiene a » » } \end{cases}$$

Se Q è esterno a $\mathfrak{D}(P_0, r)$ la $U(Q, P)$ è, come funzione di P , soluzione regolare di $\mathfrak{N}(u) = 0$ in $\mathfrak{D}(P_0, r)$ e quindi $\mu_0(U(Q, P), P_0, r) = U(Q, P_0)$ ⁽⁶⁾.

Supponiamo che Q sia interno a $\mathfrak{D}(P_0, r)$; se ε e δ sono due numeri positivi abbastanza piccoli, indicando con T il dominio $\mathfrak{D}(P_0, r) \cdot (y \leq \eta - \varepsilon) - \mathfrak{D}(P_0, \delta)$, dalla formola di reciprocità applicata al dominio T

$$\iint_T [v\mathfrak{N}(u) - u\mathfrak{L}(v)] dx dy = \int_{\mathfrak{F}T} (vu_x - uv_x) dy - vudx,$$

⁽⁶⁾ B. PINI, *Maggioranti e minoranti delle soluzioni delle equazioni paraboliche*, « Annali di Mat. pura e appl. », s. XXXVII (1954).

prendendo $v(P) = U(P, P_0) - 1/r$. $u(P) = U(Q, P)$ e facendo tendere δ a zero, si ha

$$(5) \quad \int_{\widehat{A'B'}} [U(P, P_0) - 1/r] U(Q, P) dx + \\ + \sqrt{2} \int_{\widehat{A'B'}} U(Q, P) \cos \theta \sqrt{\lg(1/\text{sen}^2 \theta)} d\theta = 2\sqrt{\pi} U(Q, P_0),$$

indicando con $\widehat{A'B'}$ il segmento di caratteristica $y = \eta - \varepsilon$ intercettato da $\mathcal{C}(P_0, r)$ e con $\widehat{A'B'}$ l'arco, percorso positivamente, di $\mathcal{C}(P_0, r)$ contenente P_0 e avente per estremi A' e B' . Passando ora al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$, nel secondo integrale si può sostituire $\widehat{A'B'}$ con \widehat{AB} e, tenendo presente che $U(Q, P) = 0$ per $y \geq \eta$, esso si può scrivere

$$\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (U(Q, P))_{\mathcal{C}(P, r)} \cos \theta \sqrt{\lg(1/\text{sen}^2 \theta)} d\theta$$

ossia $2\sqrt{\pi} \mu_0(U(Q, P), P_0, r)$. Si ha poi

$$\int_{\widehat{A'B'}} U(Q, P) dx = \left(\int_{x_{A'}}^{\xi} + \int_{\xi}^{x_{B'}} \right) \varepsilon^{-1/2} \exp[-(\xi - x)^2/4\varepsilon] dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{\pi}$$

e, per la regolarità di $U(P, P_0)$ per $P \neq P_0$,

$$\int_{\widehat{A'B'}} U(P, P_0) U(Q, P) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2\sqrt{\pi} U(Q, P).$$

Con ciò è provata la (4) se Q è interno a $\mathfrak{D}(P_0, r)$. Infine se Q appartiene a $\mathcal{C}(P_0, r)$, con un ragionamento simile a quello ora fatto, si riconosce che, per $\varepsilon \rightarrow 0$, il secondo integrale della (4) converge a $2\sqrt{\pi} \mu_0(U(Q, P), P_0, r)$ mentre il primo integrale di (4) converge a $\sqrt{\pi} [U(Q, P_0) - 1/r]$, cioè a zero perchè $U(Q, P_0) = 1/r$ su $\mathcal{C}(P_0, r)$. Resta così completamente provata la (4).

2. Poniamoci ora in un campo A semplicemente connesso; se $u(P)$ è continua con le derivate $\partial^2 u/\partial x^2$ e $\partial u/\partial y$, allora si ha (7)

$$(6) \quad \lim_{r \rightarrow 0} 3\sqrt{3} [\mu_0(u, P, r) - u(P)]/r^2 = \lim_{r \rightarrow 0} 6\sqrt{3} [\mu_1(u, P, r) - \\ - u(P)]/r^2 = \mathfrak{N}(u(P))$$

(7) Cfr. l. c. in (6).

in ogni punto di A . Senza specificare delle ipotesi su u , indicheremo con $\mathfrak{N}_0^*(u, P)$ ed $\mathfrak{N}_1^*(u, P)$ i due limiti di (6) tutte le volte che essi esistono.

Sia $\sigma(e)$ una funzione completamente additiva (a variazione limitata) dell'insieme boreliano e , variabile in A , rispetto alla quale la funzione $U(Q, P)$ sia sommabile qualunque sia il punto P in A ; e sia

$$(7) \quad u(P) = \int_A U(Q, P) d\sigma(e_Q).$$

Poniamo

$$(8) \quad D_p \sigma(P) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\int_{\mathfrak{D}(P, t)} d\sigma(e) / \frac{4\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}} t^3 \right)$$

tutte le volte che questo limite esiste, ove $\frac{4\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}} t^3 = \text{mis } \mathfrak{D}(P, t)$.

Ciò posto, proviamo che:

In ogni punto P in cui esiste finita la derivata $D_p \sigma(P_0)$, si ha

$$\mathfrak{N}_0^*(u, P_0) = \mathfrak{N}_1^*(u, P_0) = -2\sqrt{\pi} D_p \sigma(P_0).$$

Intanto, se $\mathfrak{N}_0^*(u, P_0)$ esiste finito, allora esiste finito anche $\mathfrak{N}_1^*(u, P_0)$ ed è $\mathfrak{N}_0^*(u, P_0) = \mathfrak{N}_1^*(u, P_0)$. Infatti da

$$\mu_0(u, P_0, \rho) = u(P_0) + [\mathfrak{N}_0^*(u, P_0)\rho^2 + o(\rho^2)]/3\sqrt{3}$$

si ha

$$\begin{aligned} 6\sqrt{3}[\mu_1(u, P_0, r) - u(P_0)]/r^2 &= 6\sqrt{3}\left[2 \int_0^r \mu_0(u, P_0, \rho) \rho d\rho - r^2 u(P_0)\right]/r^4 = \\ &= \mathfrak{N}_0^*(u, P_0) + \frac{4}{r^4} \int_0^r o(\rho^2) \rho d\rho. \end{aligned}$$

Per provare l'asserto basta ora appoggiarci a un ragionamento di PRIVALOFF⁽⁸⁾. Per la (4) e la (7) si ha

$$\begin{aligned} \mu_0(u, P_0, r) &= \int_A \mu_0(U(Q, P), P_0, r) d\sigma(e_Q) = \int_{\mathfrak{D}(P_0, r)} 1/r d\sigma(e_Q) + \int_{A - \mathfrak{D}(P_0, r)} U(Q, P_0) d\sigma(e_Q) = \\ &= \int_A U(Q, P_0) d\sigma(e_Q) + \int_{\mathfrak{D}(P_0, r)} [1/r - U(Q, P_0)] d\sigma(e_Q) = u(P_0) + \int_{\mathfrak{D}(P_0, r)} [1/r - U(Q, P_0)] d\sigma(e_Q) \end{aligned}$$

(8) Cfr. l. c. in (5).

onde

$$3\sqrt{3}[\mu_0(u, P_0, r) - u(P_0)]/r^2 = \frac{3\sqrt{3}}{r^2} \int_{\mathfrak{D}(P_0, r)} [1/r - U(Q, P_0)] d\sigma(e_Q).$$

Poniamo ora

$$I(t) = \int_{\mathfrak{D}(P_0, t)} d\sigma(e_Q)$$

e teniamo presente che, per la (8), è

$$I(t) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}} t^3 (D_r \sigma(P_0) + o(t)).$$

Si ha

$$\begin{aligned} 3\sqrt{3}[\mu_0(u, P_0, r) - u(P_0)]/r^2 &= \frac{3\sqrt{3}}{r^2} \int_0^r (1/r - 1/t) dI(t) = \\ &= -2\sqrt{\pi} D_r \sigma(P_0) - \frac{4\sqrt{\pi}}{r^2} \int_0^r t o(t) dt \end{aligned}$$

(effettuando una integrazione per parti); di qui segue l'asserto.

3. Come applicazione di quanto precede consideriamo un dominio $D: \chi_1(y) \leq x \leq \chi_2(y)$, $a \leq y \leq b$, con $\chi_1(y) < \chi_2(y)$ per $a \leq y < b$ e $\chi_1(y)$, $\chi_2(y)$ sufficientemente regolari così da assicurare l'esistenza di una funzione continua in D , sia $u(P)$, che in $D - S$ è soluzione di $\mathfrak{R}(u) = 0$ e in S assume valori continui arbitrariamente assegnati, intendendo con S la $\mathfrak{F}D$ privata dei punti di $\chi_1(a) < x < \chi_2(a)$, $y = a$.

Sia $f(P)$ una funzione sommabile su D con una sua potenza di esponente $> 3/2$ ⁽⁹⁾; poniamo

$$\sigma(e) = \iint_e f(Q) dQ.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{\mathfrak{D}(P_0, r)} d\sigma(e) / \text{mis } \mathfrak{D}(P_0, r) \right) &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^r \rho^2 d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f \frac{\text{sen}^2 \theta \cos \theta}{\sqrt{\lg(1/\text{sen}^2 \theta)}} d\theta / r^3 \right) \\ &= f(P) \end{aligned}$$

per quasi-tutti i punti P di D .

Pertanto, in base ai risultati precedenti, si può affermare che:

⁽⁹⁾ Si tenga presente che $U(P, Q)$ in un dominio, cui sia interno il punto Q , è sommabile rispetto a P con una potenza di esponente < 3 .

Assegnata su S un'arbitraria funzione continua φ , esiste una funzione $u(P)$ continua in D tale che $u = \varphi$ su S e $\mathcal{N}_0^(u, P) = \mathcal{N}_1^*(u, P) = -2\sqrt{\pi}f(P)$ in quasi-tutti i punti P di $D - S$ (in tutti i punti di $D - S$) se $f(P)$ è in D una funzione sommabile con una sua potenza di esponente $> 3/2$ (è in D una funzione continua).*