Bollettino Unione Matematica Italiana

Guido Vaona

Le trasformazioni fra piani che posseggono infinite coppie di curve omografiche od affini.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.3, p. 250–261.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_3_250_0>

Le trasformazioni fra piani che posseggono infinite coppie di curve omografiche od affini.

Nota di GUIDO VAONA (a Bologna)

Sunto. - *Come il n. 1.*

1. Sia T una trasformazione puntuale fra due spazi lineari S_r, S'_r $(r > 1)$ e siano V_{r-1}, V'_{r-1} due ipersuperficie corrispondenti in T. Se esiste un'omografia fra S_r, S'_r nella quale a V_{r-1} corrisponde V'_{r-1} e che subordina fra le due ipersuperficie la stessa corrispondenza subordinata da T, diremo brevemente che *le due ipersuperficie sono omografiche.* In particolare, se l'omografia precedente è un'affinità, diremo che *le due ipersuperficie sono affini.*

Si conoscono esempi di trasformazioni fra due spazi ad r dimensioni che posseggono ∞^{r+1} coppie di ipersuperficie corrispondenti omografiche (¹).

Il prof. ČECH in una riunione di Seminario tenuta a Bologna (²), propose, fra l'altro, di studiare le trasformazioni che posseggono ∞^h coppie di ipersuperficie corrispondenti omografiche per valori elevati di h.

In questa Nota risolvo alcune questioni nel caso di una trasformazione puntuale fra due piani, prendendo in esame sia il caso proiettivo che quello affine. Due fra le molte questioni che si presentano sono le seguenti:

a) *stabilire qual'è il massimo valore* $\mathrm{h_m}$ *che può assumere* h *senza che la trasformazione si riduca ad un'omografia (ad una affinità);*

(¹) Si veda: G. VAONA, *Le trasformazioni fra due spazi che posseggono iperpiani di rette caratteristiche*, « Sem. Mat. di Torino », vol. XII, pp. 195-238, (1953). Al § 2, n. 9 sono appunto indicati incidentalmente esempi di trasformazioni siffatte.

(²) Il 27 settembre 1953, cioè il giorno successivo a quello della chiusura del Convegno Internazionale di Geometria differenziale, ha avuto luogo nell'Istituto di Geometria dell'Università di Bologna un Seminario su problemi integrali della teoria delle trasformazioni puntuali a cui presero parte il prof. Čech, il prof. Villa e qualche altro.

b) *determinare le trasformazioni che posseggono* ∞^{hm} *coppie di curve corrispondenti omografiche (affini).*

Alla prima domanda risponde il seguente teorema:

I. *Se una trasformazione fra due piani possiede* ∞^{h} *coppie di curve corrispondenti omografiche (affini) con* $h > 3$, *essa è un'omografia (un'affinità).*

Non sono riuscito a dar risposta al secondo quesito nel caso proiettivo, mentre nel caso affine si ha:

II. *Le trasformazioni fra due piani* π, π' *che posseggono* ∞^3 *coppie di curve corrispondenti affini sono tutte e sole quelle che si ottengono con la seguente costruzione:*

In uno spazio S_3 *(contenente* π, π'*) si fissino una superficie* $\mathfrak{F}$ *e due punti all'infinito* S_∞, S'_∞, *non appartenenti a* π, π' *rispettivamente. Si associno coppie di punti* X, Y *di* π, π' *che sono le proiezioni da* S_∞, S'_∞ *di uno stesso punto di* $\mathfrak{F}$.

Si dimostra inoltre che con la precedente costruzione si ottengono trasformazioni di 2ª specie quando la superficie $\mathfrak{F}$ è sviluppabile oppure quando la superficie $\mathfrak{F}$ è una rigata avente come retta direttrice la retta impropria $S_\infty S'_\infty$.

Infine con la stessa costruzione si ottengono trasformazioni di 3ª specie quando la superficie $\mathfrak{F}$ è un cilindro e la retta $S_\infty S'_\infty$ passa per il vertice.

2. Una trasformazione puntuale fra i punti X di una regione di un piano $\pi(x_1, x_2, x_3)$ e i punti Y di una regione di un altro piano $\pi'(y_1, y_2, y_3)$ si può sempre rappresentare con equazioni del tipo

(1) $x_i = x_i(u, v)$, (1') $y_i = y_i(u, v)$ $(i = 1, 2, 3)$,

convenendo di considerare corrispondenti coppie di punti X, Y le cui coordinate si ottengono dalle (1), (1') per gli stessi valori dei parametri u, v. Supponiamo che le funzioni x_i, y_i siano continue e parzialmente derivabili fin che occorre nel campo $E(u, v)$ in cui sono definite e che i determinanti

(2) $|x_i \; x_i^u \; x_i^v|$, (2') $|y_i \; y_i^u \; y_i^v|$

siano generalmente $\neq 0$ in E (³).

Le funzioni x_i, y_i si possono riguardare come integrali di due

(³) Per indicare le derivazioni parziali faremo uso dei simboli $x^u = \dfrac{\partial x}{\partial u}$, $x^{uu} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, ... L'ipotesi fatta sui determinanti (2), (2') assicura che la corrispondenza considerata non è degenere.

sistemi di equazioni differenziali completamente integrabili del tipo

$$(3)\quad \begin{aligned} x^{uu} &= \alpha x^u + \beta x^v + px \\ x^{uv} &= ax^u + bx^v + cx \\ x^{vv} &= \gamma x^u + \delta x^v + qx, \end{aligned} \qquad (3')\quad \begin{aligned} y^{uu} &= \bar{\alpha} y^u + \bar{\beta} y^v + \bar{p} y \\ y^{uv} &= \bar{a} y^u + \bar{b} y^v + \bar{c} y \\ y^{vv} &= \bar{\gamma} y^u + \bar{\delta} y^v + \bar{q} y, \end{aligned}$$

dove i coefficienti sono funzioni di u e v legate da certe relazioni (le condizioni di integrabilità) [4].

Poichè le coordinate omogenee dei punti di π e π' sono definite a meno di un fattore (funzione di u e v) si possono scegliere i due fattori di proporzionalità delle coordinate in modo che nelle (3), (3′) risulti $p = c = q = 0$, $\bar{p} = \bar{c} = \bar{q} = 0$. Ciò si ottiene mediante le trasformazioni $x = \rho\bar{x}$, $y = \sigma\bar{y}$, essendo ρ e σ due integrali particolari dei sistemi (3) e (3′) rispettivamente.

Supponiamo d'ora in poi d'aver scelto i fattori di proporzionalità in tale modo, onde

$$(4)\quad p = c = q = 0, \qquad (4')\quad \bar{p} = \bar{c} = \bar{q} = 0.$$

Le *condizioni di integrabilità* del sistema (3), avendo riguardo alle (4), si scrivono

$$(5)\quad \begin{aligned} \alpha^v + \beta\gamma &= a^u + ab \\ \delta^u + \beta\gamma &= b^v + ab \\ \beta^v + b\alpha + \beta\delta &= b^u + a\beta + b^2 \\ \gamma^u + a\delta + \gamma\alpha &= a^v + b\gamma + a^2. \end{aligned}$$

Le condizioni di integrabilità (5′) del sistema (3′) si ottengono dalle (5) sostituendo ad ogni lettera la stessa sopralineata.

Le curve caratteristiche della trasformazione sono rappresentate dall'equazione differenziale

$$(6)\quad \begin{aligned} &(\beta - \bar{\beta})du^3 + (2b - 2\bar{b} + \bar{\alpha} - \alpha)du^2dv + \\ &+ (2\bar{a} - 2a + \delta - \bar{\delta})dudv^2 + (\bar{\gamma} - \gamma)dv^3 = 0. \end{aligned}$$

3. Consideriamo due generiche curve corrispondenti nella trasformazione ottenute ponendo nelle (1), (1′) $v = v(u)$ e quindi di equazioni parametriche

$$(7)\quad x = x[u,\ v(u)], \qquad (7')\quad y = y[u,\ v(u)]\ [5].$$

(4) Per ciò che riguarda la rappresentazione di una trasformazione puntuale mediante sistemi di equazioni differenziali si veda: G. Fubini e E. Čech, *Géométrie projective différentielle des surfaces.* Gauthier-Villars, Paris (1931), pp. 146-191. Si veda anche M. Villa, *Per una geometria proiettiva differenziale in grande delle trasformazioni puntuali,* « Atti IV Congresso Un. Mat. Ital. Taormina (1951) », Casa Ed. Perrella, Roma, pp. 263-273 (1952).

(5) D'ora in avanti omettiamo l'indice i quando dobbiamo indicare le coordinate x_i, y_i di punti di π, π'.

Le funzioni x della variabile u sono integrali di un'equazione differenziale lineare omogenea del 3° ordine che si ricava derivando tre volte la (7) rispetto ad u ed eliminando le derivate parziali x^u, $x^v, \ldots, x^{vvv}$ mediante le (3).

Si ottiene così l'equazione differenziale

$$(8) \qquad x'''(B - Av') + x''(Cv' - D) + x'(AD - CB) = 0,$$

dove

$$(9) \qquad \begin{aligned} A &= \gamma v'^2 + 2av' + \alpha \\ B &= v'' + \delta v'^2 + 2bv' + \beta \\ C &= 3v''(\gamma v' + a) + (\gamma^v + \delta\gamma + \gamma a)v'^3 + 3(\gamma^u + \gamma\alpha + \delta a)v'^2 + \\ &\qquad + 3(\alpha^v + \beta\gamma + \alpha a)v' + (\alpha^u + \alpha^2 + \beta a) \\ D &= v''' + 3v''(\delta v' + b) + (\delta^v + \delta^2 + \gamma b)v'^3 + 3(\delta^u + \gamma\beta + \delta b)v'^3 + \\ &\qquad + 3(\beta^v + \beta\delta + \alpha b)v' + (\beta^u + \alpha\beta + \beta b). \end{aligned}$$

Analogamente le funzioni y della variabile u sono integrali dell'equazione differenziale

$$(8') \qquad y'''(\bar{B} - \bar{A}v') + y''(\bar{C}v' - \bar{D}) + y'(\bar{A}\bar{D} - \bar{C}\bar{B}) = 0,$$

dove $\bar{A}, \ldots, \bar{D}$ sono le espressioni che si deducono dalle (9) sostituendo alle $\alpha, \ldots, \delta$ le $\bar{\alpha}, \ldots, \bar{\delta}$ rispettivamente.

Vogliamo ora imporre che la corrispondenza $\mathcal{C}$ subordinata sulle due curve dalla trasformazione T sia omografica, ossia che esista un'omografia fra π, π' che muta l'una curva nell'altra e subordina sulle due curve la corrispondenza $\mathcal{C}$.

Perchè ciò si verifichi occorre e basta che i tre integrali della (8') rappresentanti la curva di π' siano, a meno di un fattore (eventualmente funzione di u), combinazioni lineari a coefficienti costanti dei tre integrali della (8) rappresentanti la curva corrispondente in π. Ciò significa che mediante una trasformazione del tipo $y = \rho\bar{y}$ la (8') deve potersi far coincidere con la (8).

Eseguendo i calcoli si trova che le curve considerate sono omografiche se e solo se esiste una funzione $\rho(u)$ tale che

$$\begin{aligned} 3\rho' E\bar{E} + \rho(E\bar{F} - \bar{E}F) &= 0 \\ 3\rho'' E\bar{E} + 2\rho' E\bar{F} + \rho(E\bar{G} - \bar{E}G) &= 0 \\ \rho'''\bar{E} + \rho''\bar{F} + \rho'\bar{G} &= 0, \end{aligned}$$

avendo indicato con E, F, G ed $\bar{F}, \bar{E}, \bar{G}$ i coefficienti delle (8), (8').

Eliminando ρ fra tali equazioni si ha infine:

Condizione necessaria e sufficiente perchè le curve (7), (7') *siano* *omografiche è che la funzione* v(u) *sia un integrale delle equazioni differenziali*

$$(10)\qquad \left(\frac{E\bar{F}-\bar{E}F}{3E\bar{E}}\right)'=\frac{3E\bar{E}(E\bar{G}-\bar{E}G)-(E\bar{F}-\bar{E}F)(E\bar{F}+\bar{E}F)}{9(E\bar{E})^2}$$

$$(11)\qquad 3EE\left(\frac{E\bar{G}-\bar{E}G}{3E\bar{E}}\right)'-(E\bar{F}-\bar{E}F)\left(\frac{E\bar{F}+\bar{E}F}{3E\bar{E}}\right)'=$$

$$=\frac{(E\bar{F}+\bar{E}F)(E\bar{G}-\bar{E}G)+(E\bar{F}-\bar{E}F)(E\bar{G}+\bar{E}G)}{2E\bar{E}}-$$

$$-\frac{(E\bar{F}-\bar{E}F)[(E\bar{F})^2+(\bar{E}F)^2]}{9(E\bar{E})^2}.$$

Poichè le (10) e (11) sono equazioni differenziali del 4° ordine in $v(u)$ si avrà $h_m \leq 4$. Infatti perchè sia $h=5$ le (10) e (11) devono svanire. Ma in tale caso tutte le coppie di curve corrispondenti sono omografiche e la trasformazione è quindi un'omografia.

Perchè sia $h=4$ occorre poi che le (10) e (11) coincidano. Eliminando la derivata quarta si ha un'equazione differenziale del 3° ordine del tipo

$$v'''^3 v''^4 (E-\bar{E})^2 + v'''^3 P + Q = 0$$

dove P è un polinomio di 3° grado in v'' e Q un polinomio in v'', v''', di 2° grado in v'''. Affinchè le (10) e (11) coincidano dovrà quindi aversi in particolare $E-\bar{E}=0$ (identicamente rispetto ad u, v e v'). Ma allora la (6) risulta un'identità e quindi la trasformazione è un'omografia. Si conclude quindi:

Se una trasformazione puntuale fra due piani possiede ∞^{h} *coppie di curve corrispondenti omografiche con* $\mathrm{h}>3$, *essa è un'omografia.*

Siccome esistono esempi di trasformazioni per cui $h=3$, si può concludere che è $h_m=3$.

4. Vogliamo ora occuparci delle questioni analoghe in campo affine. Supponiamo che nelle (1), (1') sia $x_3=y_3=1$.

Affinchè le curve (7), (7') siano affini è necessario e sufficiente che i tre integrali della (8') rappresentanti la curva (7') di π' siano combinazioni lineari a coefficienti costanti dei tre integrali della (8) rappresentanti la curva corrispondente in π. Si ha quindi:

Condizione necessaria e sufficiente perchè le curve (7), (7') *siano affini è che la funzione* v(u) *sia un integrale delle equazioni diffe-*

renziali ottenute annullando i minori del 2° ordine estratti dalla matrice

$$
\left\| \begin{matrix} B - Av' & D - Cv' & AD - BC \\ \bar{B} - \bar{A}v' & \bar{D} - \bar{C}v' & \bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C} \end{matrix} \right\| . \tag{12}
$$

Supponiamo che le curve considerate non siano rette, il che comporta $B - Av' \neq 0$, $\bar{B} - \bar{A}v' \neq 0$. Ciò, come apparirà dal seguito, non lede la generalità delle questioni trattate. Annullando i minori ottenuti aggiungendo alla 1ª colonna della (12) successivamente le altre due, si ottengono le due equazioni differenziali

$$
v''' = \frac{v''^2 g + v'' h + k}{f} \tag{13}
$$

$$
v''' = \frac{v''^3 p + v''^2 q + v'' r + s}{v'' m + n}, \tag{14}
$$

dove $f, g, \ldots, r, s$ sono funzioni di u, v, v', razionali intere in v'.

Eseguendo i calcoli si ottiene

$$
\begin{aligned}
f &= \lambda - \bar{\lambda} \\
g &= \mu - \bar{\mu} \\
h &= \lambda(\mu - \bar{\mu}) - \mu(\lambda - \bar{\lambda}) + \nu - \bar{\nu} \\
k &= \lambda(\nu - \bar{\nu}) - \nu(\lambda - \bar{\lambda})
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
m &= \rho - \bar{\rho} \\
n &= \lambda(\rho - \bar{\rho}) - \rho(\lambda - \bar{\lambda}) \\
p &= -(\sigma - \bar{\sigma}) \\
q &= \sigma(\lambda - \bar{\lambda}) - \lambda(\sigma - \bar{\sigma}) - (\tau - \bar{\tau}) \\
r &= \tau(\lambda - \bar{\lambda}) - \lambda(\tau - \bar{\tau}) - (\eta - \bar{\eta}) \\
s &= \eta(\lambda - \bar{\lambda}) - \lambda(\eta - \bar{\eta}),
\end{aligned}
$$

essendo inoltre

$$
\begin{aligned}
\lambda &= -\gamma v'^3 + (\delta - 2a)v'^2 + (2b - \alpha)v' + \beta \\
\mu &= -3\gamma v'^2 + 3(\delta - a)v' + 3b \\
\nu &= D^* - C^* v'
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\rho &= \gamma v'^2 + 2av' + \alpha \\
\sigma &= -3(\gamma v' + a) \\
\tau &= 3(\delta a - \gamma b)v'^2 + 3(\alpha\delta - \beta\gamma)v' + 3(\alpha b - \beta a) - C^* \\
\eta &= (\gamma v'^2 + 2av' + \alpha)D^* - (\delta v'^2 + 2bv' + \beta)C^*,
\end{aligned}
$$

ed infine

$$
D^* = D - v''' - 3v''(\delta v' + b), \qquad C^* = C - 3v''(\gamma v' + a). \tag{15}
$$

Al solito $\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \ldots, \bar{C}^*$ sono date dalle formule ottenute dalle precedenti sostituendo ad ogni lettera la stessa sopralineata.

Dalle equazioni differenziali (13), (14) segue subito il risultato:

Se una trasformazione puntuale T *fra due piani possiede* ∞^{h} *coppie di curve corrispondenti affini con* $h > 3$, *essa è un'affinità.*

Invero se esistono ∞^h coppie di curve corrispondenti in T ed affini con $h > 3$ le equazioni differenziali (11) e (12) devono essere identicamente soddisfatte e quindi tutte le coppie di curve corrispondenti sono affini. Ne viene che T è un'affinità.

Dal teorema precedente segue che il massimo valore h_m che può assumere h, senza che la trasformazione si riduca ad una affinità, è ≤ 3. Siccome però esistono esempi di trasformazioni per cui $h = 3$ (6), si può concludere che è $h_m = 3$.

Vogliamo ora determinare tutte le trasformazioni che posseggono ∞^3 coppie di curve corrispondenti affini.

Affinchè la trasformazione (3), (3′) soddisfi a tale condizione occorre che le equazioni differenziali (13) e (14) coincidano. Perchè ciò avvenga deve aversi (identicamente rispetto ad u, v, v', v'')

$$mg \qquad = pf \tag{16}$$

$$mh + ng = qf \tag{17}$$

$$mk + nh = rf \tag{18}$$

$$nk = sf. \tag{19}$$

5. Supponiamo dapprima che la trasformazione T sia di 1ª o 2ª specie (7). Si possono allora sempre fissare i parametri u e v in modo che le linee coordinate $u =$ cost., $v =$ cost. coincidano con due schiere di curve caratteristiche. Si ha così

$$\beta = \bar{\beta}, \qquad \gamma = \bar{\gamma}. \tag{20}$$

Dalla (16), tenendo conto delle (20), si hanno le tre relazioni

$$(a - \bar{a})(\delta - \bar{\delta}) = 0, \qquad (b - \bar{b})(\alpha - \bar{\alpha}) = 0, \qquad (\alpha - \bar{\alpha})(\delta - \bar{\delta}) = 0, \tag{21}$$

dalle quali tre casi appaiono possibili:

I) $\qquad \alpha = \bar{\alpha}, \qquad \delta = \bar{\delta};$

II) $\qquad a = \bar{a}, \qquad \alpha = \bar{\alpha};$

III) $\qquad b = \bar{b}, \qquad \delta = \bar{\delta}.$

Nei numeri 6, 7 tratteremo separatamente i tre casi I), II), III) e nel n. 8 il caso delle trasformazioni di 3ª specie, pervenendo al risultato:

Le trasformazioni fra due piani π, π' che posseggono ∞^3 coppie di curve corrispondenti affini sono tutte e sole quelle che si ottengono con la seguente costruzione:

(6) Si veda op. cit. in (1).

(7) Si dicono di 1ª specie le trasformazioni che posseggono tre famiglie ∞^1 distinte di curve caratteristiche, di 2ª specie le trasformazioni in cui due delle famiglie di curve caratteristiche coincidono, di 3ª specie le trasformazioni in cui tutte e tre le famiglie di curve caratteristiche coincidono.

In uno spazio S_3 *(contenente* π, π'*) si fissino una superficie* $\mathfrak{F}$ *e due punti all'infinito* S_∞, S'_∞, *non appartenenti a* π, π' *rispettivamente. Si associno coppie di punti* X, Y *di* π, π' *che sono le proiezioni da* S_∞, S'_∞ *di uno stesso punto di* $\mathfrak{F}$.

È chiaro come ∞^3 coppie di curve corrispondenti in una trasformazione del tipo precedente ed affini nascono dalle proiezioni delle ∞^3 sezioni piane di $\mathfrak{F}$.

Queste trasformazioni godono inoltre di una proprietà caratteristica che ho già osservata altrove ([8]) e che qui ricordo perchè di essa farò uso in seguito. Si ha:

In ciascuno dei due piani uno dei tre sistemi di curve caratteristiche è un fascio di rette e la trasformazione subordina fra i due fasci di rette caratteristiche una proiettività.

6. Supponiamo dapprima $\alpha = \bar{\alpha}$, $\delta = \bar{\delta}$. Sottraendo membro a membro le condizioni di integrabilità (5) con le corrispondenti (5') si hanno le

$$\begin{aligned} a^u - \bar{a}^u &= \bar{a}\bar{b} - ab \\ b^v - \bar{b}^v &= \bar{a}\bar{b} - ab \\ b^u - \bar{b}^u &= \alpha(b - \bar{b}) - \beta(a - \bar{a}) + \bar{b}^2 - b^2 \\ a^v - \bar{a}^v &= \delta(a - \bar{a}) - \gamma(b - \bar{b}) + \bar{a}^2 - a^2. \end{aligned}$$

Derivando la 1ª rispetto a v e la 4ª rispetto ad u e sottraendo membro a membro, avendo riguardo alle (5), si ha

$$(a - \bar{a})(b^v - a^u) = 0.$$

Così derivando la 2ª rispetto ad u e la 3ª rispetto a v e sottraendo membro a membro, si ottiene

$$(b - \bar{b})(b^v - a^u) = 0.$$

Escludendo che la trasformazione sia un'omografia e cioè che sia $a = \bar{a}$ e $b = \bar{b}$, deve aversi

$$a^u = b^v. \tag{22}$$

La (22) è, assieme alle (5), condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema formato dalla prima e terza delle equazioni (3)

([8]) Si veda: M. Villa e G. Vaona, *Alcune osservazioni sulle curve caratteristiche delle trasformazioni cremoniane*, «Boll. Un. Mat. Ital.», (3) **5**, pp. 101-107 (1950); G. Vaona, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani aventi due reti asintotiche di curve caratteristiche corrispondenti*, «Boll. Un. Mat. Ital.», (3) **7**, pp. 148-154 (1952).

sia completamente integrabile ([9]). Ma è notissimo che il sistema formato da due equazioni siffatte ammette quattro integrali particolari linearmente indipendenti ed ogni altro integrale è combinazione lineare a coefficienti costanti di questi.

Ne consegue che le funzioni x_1, y_1 sono combinazioni lineari a coefficienti costanti di quattro funzioni linearmente indipendenti. La trasformazione si può ottenere quindi proiettando da due punti impropri su π, π' due superficie $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ corrispondenti in un'affinità Ω ed associando coppie di punti di π, π' che sono le proiezioni di punti corrispondenti in Ω. Ora se mediante un'affinità si fanno coincidere le due superficie $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$, si ricade nella costruzione del teorema precedente.

7. Trattiamo ora il caso $a = \bar{a}$, $\alpha = \bar{\alpha}$. Sottraendo membro a membro le condizioni di integrabilità (5) con le corrispondenti (5'), dalle 1e e 4e, si hanno le

$$a(b - \bar{b}) = 0 \tag{23}$$

$$a(\delta - \bar{\delta}) = \gamma(b - \bar{b}). \tag{24}$$

Dalle (23), (24) segue $a = 0$, poichè nell'ipotesi opposta si avrebbe $b = \bar{b}$, $\delta = \bar{\delta}$ e quindi la trasformazione si ridurrebbe ad una omografia.

Tenendo conto delle relazioni $a = \bar{a} = 0$, $\alpha = \bar{\alpha}$, $\gamma(b - \bar{b}) = 0$, si ha

$$\begin{aligned} f &= (\delta - \delta)v'^2 + 2(b - \bar{b})v' & m &= 0 \\ g &= 3(\delta - \bar{\delta})v' + 3(b - \bar{b}) & n &= -(\gamma v'^2 + \alpha)f \\ & & q &= -3\gamma v' f - \alpha g + \gamma(\delta - \bar{\delta})v'^3. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (17) tali espressioni si trova che deve essere

$$\gamma(\delta - \bar{\delta}) = 0. \tag{25}$$

La (25) assieme alla $\gamma(b - \bar{b}) = 0$ ci assicura che deve essere $\gamma = 0$.

Le equazioni differenziali della trasformazione si scrivono

$$(26) \quad \begin{aligned} x^{uu} &= \alpha x^u + \beta x^v \\ x^{uv} &= b x^v \\ x^{vv} &= \delta x^v, \end{aligned} \qquad (26') \quad \begin{aligned} y^{uu} &= \alpha y^u + \beta y^v \\ y^{uv} &= \bar{b} y^v \\ y^{vv} &= \bar{\delta} y^v. \end{aligned}$$

([9]) Ciò può verificarsi direttamente, ma è anche noto e trovasi nella teoria delle reti asintotiche. Si veda ad es. G. Fubini e E. Čech, op. cit. in ([4]), pp. 150-153.

Dalle (26), (26′) appare che le curve caratteristiche $u = \text{cost.}$ sono rette. Ma si ha inoltre:

Le curve caratteristiche corrispondenti u = cost. *sono rette appartenenti a due fasci fra i quali la trasformazione subordina una proiettività.*

Indichiamo infatti con ξ le coordinate plückeriane delle rette (x, x^u), con $\mathfrak{J}$ quelle delle rette (x, x^v) e con η quelle delle rette (x^u, x^v). Tenendo conto delle (26) e derivando. si hanno le relazioni

$$\mathfrak{J}^u = \eta + b\mathfrak{J}, \quad \mathfrak{J}^v = \delta\mathfrak{J}, \quad \eta^u = (\alpha + b)\eta, \quad \mathfrak{J}^{uu} = \eta^u + b\mathfrak{J}^u + b^u\mathfrak{J}.$$

Eliminando fra queste η, η^u, si ottiene l'equazione differenziale del 2° ordine rappresentativa delle rette $u = \text{cost.}$ di π

$$\mathfrak{J}^{uu} = (\alpha + 2b)\mathfrak{J}^u + [b^u - b(\alpha + b)]\mathfrak{J}. \tag{27}$$

La (27) prova intanto che le rette di π $u = \text{cost.}$ costituiscono un fascio.

L'analoga equazione differenziale rappresentativa delle rette $u = \text{cost.}$ in π' si scrive

$$\mathfrak{J}^{uu} = (\alpha + 2\bar{b})\mathfrak{J}^u + [\bar{b}^u - \bar{b}(\alpha + \bar{b})]\mathfrak{J} \tag{27'}$$

e prova che anche tali rette stanno in un fascio.

Per dimostrare che la corrispondenza subordinata dalla trasformazione fra i due fasci è proiettiva, basta far vedere che mediante una trasformazione del tipo $\mathfrak{J} = \rho\bar{\mathfrak{J}}$ la (27) può farsi coincidere con la (27′). Ora si prova che basta scegliere ρ fra gli integrali della equazione

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial u} = b - \bar{b},$$

perchè la trasformata della (27) coincida con la (27′).

Dal teorema dimostrato e dalla proprietà caratteristica ricordata al n. 5 segue che la trasformazione in esame fa parte di quelle descritte al n. 5.

Resta ancora da trattare il caso $b = \bar{b}$, $\delta = \bar{\delta}$. Con lo stesso procedimento usato per il caso precedente si prova che le curve caratteristiche corrispondenti $v = \text{cost.}$ sono, sia in π che in π', rette di un fascio e che inoltre la trasformazione subordina fra i due fasci una proiettività. Segue quindi la stessa conclusione precedente.

8. Ci rimangono ancora da esaminare le trasformazioni di 3ª specie. Assumiamo l'unica famiglia di curve caratteristiche come linee coordinate $v = \text{cost.}$. Ciò comporta

$$(28) \qquad \beta = \bar{\beta}, \quad 2(b - \bar{b}) = \alpha - \bar{\alpha}, \quad 2(a - \bar{a}) = \delta - \bar{\delta}, \quad \gamma \neq \bar{\gamma}.$$

Dalla (16), eseguendo i calcoli tenendo conto delle (28), scendono le relazioni $b = \bar{b}$, $a = \bar{a}$. Per le (28) si avrà quindi

$$(29) \qquad \beta = \bar{\beta}, \quad \alpha = \bar{\alpha}, \quad \delta = \bar{\delta}, \quad a = \bar{a}, \quad b = \bar{b}, \quad \gamma \neq \bar{\gamma}.$$

Sottraendo poi membro a membro le 1ᵉ delle (5), (5′) si ha $\beta(\gamma - \bar{\gamma}) = 0$, onde, essendo $\gamma \neq \bar{\gamma}$, scende

$$(30) \qquad \beta = 0.$$

Infine dalla (17) si ottiene

$$(31) \qquad b = 0.$$

Le equazioni differenziali della trasformazione si scrivono

$$(32) \quad \begin{aligned} x^{uu} &= \alpha x^{u} \\ x^{uv} &= a x^{u} \\ x^{vv} &= \gamma x^{u} + \delta x^{v}, \end{aligned} \qquad (32') \quad \begin{aligned} y^{uu} &= \alpha y^{u} \\ y^{uv} &= a y^{u} \\ y^{vv} &= \bar{\gamma} y^{u} + \delta y^{v}. \end{aligned}$$

Tali equazioni mostrano che le curve caratteristiche $v = \text{cost.}$ sono rette. Indicate poi con ξ le coordinate plückeriane delle rette $v = \text{cost.}$, si verifica che, sia in π che in π', le ξ soddisfano alla equazione differenziale del 2° ordine

$$(33) \qquad \xi^{vv} = (2a + \delta)\xi^{v} + [a^{v} - a(a + \delta)]\xi.$$

La (33) assicura che le curve caratteristiche $v = \text{cost.}$ sono, sia in π che in π', rette di un fascio ed inoltre che la corrispondenza subordinata dalla trasformazione fra le rette dei due fasci è proiettiva. Segue quindi che anche le trasformazioni di 3ª specie con ∞^3 coppie di curve corrispondenti affini rientrano fra quelle descritte al n. 5.

9. Vogliamo infine caratterizzare fra le trasformazioni studiate quelle di 2ª e 3ª specie. Le trasformazioni in esame con scelta opportuna dei riferimenti cartesiani nei due piani π, π' si possono rappresentare, in coordinate non omogenee (x, y), $(\bar{x}, \bar{y})$, con le equazioni

$$(34) \qquad \bar{x} = x, \qquad \bar{y} = \varphi(x, y) \text{ (}^{10}\text{)}.$$

La trasformazione si ottiene proiettando sui piani $\pi(x, y)$, $\pi'(\bar{x}, \bar{y})$ la superficie $\mathfrak{F}$ dello spazio $(x, y, \bar{y})$ di equazione $\bar{y} = \varphi(x, y)$ dai

[10] Si veda il 1° dei lavori cit. in [8], p. 106.

punti impropri degli assi $\bar{y}$, y rispettivamente. Le curve caratteristiche in $\pi(x, y)$ sono costituite dal fascio di rette di centro il punto improprio dell'asse y e dalle proiezioni delle curve asintotiche di $\mathfrak{F}$ dal punto improprio dell'asse $\bar{y}$, che hanno equazioni $x = x(y)$ con $x(y)$ integrale della

$$(35) \qquad x'^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2x' \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Affinchè la trasformazione sia di 2ª specie: 1°) o dovranno coincidere i due sistemi di curve (35) e quindi $\mathfrak{F}$ essere sviluppabile; 2°) oppure uno dei due sistemi di curve (35) dovrà ridursi al fascio di rette parallele all'asse y. Nel 2°) caso si avrà $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ e quindi $\varphi = f(x) + yg(x)$. La superficie $\mathfrak{F}$ è una rigata avente per retta direttrice la retta impropria del piano $y\bar{y}$. Inversamente se $\mathfrak{F}$ è una sviluppabile oppure una rigata avente per retta direttrice la retta impropria del piano $y\bar{y}$ la (34) è una trasformazione di 2ª specie. Concludendo quindi:

Le trasformazioni di 2ª specie che posseggono ∞^3 coppie di curve corrispondenti affini sono tutte e sole quelle che si ottengono con la costruzione indicata al n. 5, nell'ipotesi che la superficie $\mathfrak{F}$ sia:

1°) *o una rigata sviluppabile;*

2°) *o una rigata avente come retta direttrice la retta impropria* S_∞, S'_∞.

Infine affinchè la (34) sia una trasformazione di 3ª specie occorre che tutti e due i sistemi di curve (35) coincidano col fascio di rette di centro il punto improprio dell'asse y. Dovrà aversi $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$ e quindi $\varphi = f(x) + hy$ (h costante). La superficie $\mathfrak{F}$ è un cilindro avente per vertice un punto della retta impropria del piano $y\bar{y}$. Inversamente se $\mathfrak{F}$ è un cilindro siffatto la (34) è una trasformazione di 3ª specie, onde si ha:

Le trasformazioni di 3ª specie che posseggono ∞^3 coppie di curve corrispondenti affini sono tutte e sole quelle che si ottengono con la costruzione indicata al n. 5, nell'ipotesi che la superficie $\mathfrak{F}$ sia un cilindro avente il vertice sulla retta $S_\infty S'_\infty$.