Luigi Muracchini

Ancora sulle varietà V_3 analitiche pluririgate.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.3, p. 262–265.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_3_262_0>

Ancora sulle varietà V_3 analitiche pluririgate.

Nota di LUIGI MURACCHINI (a Bologna)

Sunto. - *Si completa la dimostrazione di una proposizione sulle varietà V_3 con due sistemi ∞^2 di rette, enunciata in una precedente Nota di questo Bollettino.*

1. In una precedente Nota (che indicherò con Nota I) (1) apparsa in questo Bollettino ho, fra l'altro, enunciato la seguente proposizione: *le* V_3 *analitiche* $2-$ *rigate* (2) *appartenenti ad uno* S_n *sono, per* $n > 10$, V_3 *luogo di* ∞^1 *quadriche di* S_3. La dimostrazione che ne ho dato è valida però soltanto *nell'ipotesi che la* V_3 *considerata non soddisfi ad altre equazioni di* LAPLACE, oltre alle due traducenti il fatto che la V_3 è due volte rigata, ed inoltre non soddisfi ad equazioni del terzo ordine all'infuori di quelle che sono conseguenze di quelle due equazioni di LAPLACE (3).

Come ho detto nella Nota I, il risultato in discorso si può anche far discendere da certi altri ottenuti da P. BUZANO (4), *ma sempre nell'ipotesi sopra indicata,* come esplicitamente fa rilevare il BUZANO.

Ora la proposizione enunciata in principio è vera a prescindere dall'ipotesi menzionata e aggiunta nel corso della dimostrazione che ne ho dato nella Nota I. Oggetto della presente Nota è appunto quello di completare la predetta dimostrazione in modo che risulti la completa validità del teorema.

2. Adopererò le notazioni della Nota I. Ricordo che ad un punto generico di una V_3 vengono associati, come ho spiegato nel n. 2 della Nota I, certi sistemi lineari di forme algebriche ternarie di ordine eguale a quello dell'intorno del punto di V_3 cui sono associati. Se $q-1$ è la dimensione del sistema lineare di quelle forme che sono quadratiche (indicate con $\Phi^{(2)}$) allora lo $S(2)-$ osculatore

(1) *Sulle varietà* V_3 *analitiche pluririgate,* questo Bollettino (3) 8, 138-144.

(2) Per varietà V_3 $\mu-$rigata si intende una V_3 contenente ∞^2 rette in modo tale che da un suo punto generico escono μ rette giacenti sulla varietà (tre qualsiansi delle quali mai complanari).

(3) Tali equazioni di 3° ordine sono in numero di 6, linearmente indipendenti.

(4) P. BUZANO, *Sistemi di due equazioni di* LAPLACE *per una funzione di tre variabili e loro varietà rappresentative,* Ist. Lombardo, Mem., (3) 13, 1-33 (1935).

alla V_3 in quel punto ha dimensione $3+q$; se $r-1$ è la dimensione del sistema lineare delle forme cubiche $\Phi^{(3)}$, lo $S(3)$ — osculatore alla V_3 ha dimensione $3+q+r$ e così via.

Aggiungo ora la seguente osservazione, di facile verifica, che risulterà utile in seguito: *il sistema lineare delle forme d'ordine* m, $\Phi^{(m)}$, *associate ad una varietà qualsiasi, ed il sistema lineare delle forme associate alle equazioni d'ordine* m *cui soddisfa la varietà, sono due sistemi di forme apolari* (5).

Veniamo ora alla dimostrazione della proposizione sulle V_3 2 — rigate enunciata in principio del n. 1. Distingueremo due casi: nel primo caso supporremo che la V_3 non soddisfi che alle due equazioni di LAPLACE traducenti l'esistenza dei due sistemi di rette che contiene, ma soddisfi eventualmente anche ad equazioni del 3° ordine diverse (e linearmente indipendenti) da quelle che sono conseguenza delle due equazioni di LAPLACE. Nel secondo caso la V_3 potra soddisfare anche ad una ulteriore oppure a due ulteriori equazioni di LAPLACE ed inoltre anche eventualmente ad equazioni del 3° ordine che non siano conseguenze di quelle del 2° ordine cui la varietà soddisfa. In ogni caso sarà essenziale tener presente la ipotesi che la V_3 appartiene ad uno spazio di dimensione $n>10$ e che essa non è luogo di piani.

Trattiamo ora il primo dei due casi sopra considerati. Attualmente il sistema lineare delle forme $\Phi^{(2)}$ è lo stesso che nel caso trattato nella Nota I. Ma ora, poichè la V_3 può soddisfare anche ad altre equazioni del 3° ordine oltre alle conseguenze delle due equazioni di LAPLACE cui soddisfa, non vi saranno più 4 forme $\Phi^{(3)}$ linearmente indipendenti. Ma se fra le forme $\Phi^{(3)}$ (che non possono tutte svanire (6)) ve n'è ancora una che contenga il termine in $\omega_1\omega_2\omega_3$ si vede subito che sussiste la dimostrazione svolta nella Nota I.

Dobbiamo dunque considerare i nuovi casi in cui le forme $\Phi^{(3)}$ linearmente indipendenti sono: (a) tre, (b) due oppure una soltanto; in ogni caso però del tipo:

$$\Phi_\alpha^{(3)}=2a_{3\alpha}\omega_1\omega_3^2+2a_{4\alpha}\omega_2\omega_3^2+a_{5\alpha}\omega_3^3 . \tag{1}$$

(5) Dico che le due forme d'ordine m:

$$F=\sum_{i+j+k=m} a_{ijk}\theta_1^i\theta_2^j\theta_3^k \quad , \quad \Phi=\sum_{i+j+k=m} b_{ijk}\omega_1^i\omega_2^j\omega_3^k$$

sono *apolari* quando

$$\sum_{i,j,k} a_{ijk}\, b_{ijk}=0 .$$

(6) Altrimenti coinciderebbero gli $S(2)$ ed $S(3)$ osculatori alla V_3 e questa apparterrebbe allora ad uno spazio di dimensione <10.

Nel caso (a) con una opportuna scelta del riferimento si vede immediatamente che valgono le relazioni;

$$
(1')\qquad
\begin{array}{l}
\omega_{48}=\omega_{58}=\omega_{68}=0 \quad , \quad \omega_{78}=\omega_3 \\
\omega_{49}=\omega_{69}=0 \quad , \quad \omega_{59}=\omega_3 \quad , \quad \omega_{79}=\omega_1 \\
\omega_{4,10}=\omega_{5,10}=0 \quad , \quad \omega_{6,10}=\omega_3 \quad , \quad \omega_{7,10}=\omega_2 \\
\omega_{4\alpha}=\omega_{5\alpha}=\omega_{6\alpha}=\omega_{7\alpha}=0 \qquad \text{per } \alpha=11\,,\dots n\,.
\end{array}
$$

Le altre relazioni (6), (7) del n. 4 della Nota I rimangono immutate. Differenziando esternamente le relazioni

$$\omega_{78}=\omega_{59}=\omega_{6,10}=\omega_3$$

e applicando il solito Lemma di Cartan si è condotti alle relazioni

$$
(2)\qquad
\begin{array}{r}
\omega_{13}-\omega_{98}=\alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2+\alpha_3\omega_3 \\
\omega_{23}-\omega_{10,8}=\alpha_2\omega_1+\alpha_4\omega_2+\alpha_5\omega_3 \\
\omega_{13}+\omega_{57}=\beta_1\omega_1+\beta_2\omega_2+\beta_3\omega_3 \\
\omega_{23}=\beta_2\omega_1+\beta_4\omega_2+\beta_5\omega_3 \\
\omega_{13}=\gamma_1\omega_1+\gamma_2\omega_2+\gamma_3\omega_3 \\
\omega_{23}+\omega_{67}=\gamma_2\omega_1+\gamma_4\omega_2+\gamma_5\omega_3
\end{array}
$$

Analogamente le $\omega_{58}=\omega_{68}=0$ conducono ad

$$
(3)\qquad
\begin{array}{l}
\omega_{57}-\omega_{98}=k\omega_3 \\
\omega_{67}-\omega_{10,8}=l\omega_3
\end{array}
$$

Queste ultime insieme con le (2) permettono di concludere che

$$
\begin{array}{l}
\alpha_2+\beta_2=2\gamma_2 \\
\alpha_2+\gamma_2=2\beta_2
\end{array}
$$

sicchè

$$\beta_2=\gamma_2$$

questo permette di concludere. come nel n. 4 della Nota I, che la forma ω_3 è integrabile ed il teorema è dimostrato.

Nel caso (b) in cui vi sono soltanto due (oppure una sola) forme $\Phi^{(3)}$ del tipo (1), ricordiamo anzitutto che (cfr. n. 2 della Nota I) le forme $\Phi^{(4)}$ del quarto ordine associate alla V_3 sono tali che tutte le loro forme polari appartengono al sistema lineare delle forme $\Phi^{(3)}$. Pertanto le forme $\Phi^{(4)}$ svaniscono tutte o sono della forma $\omega_3{}^3(\alpha\omega_1+\beta\omega_2+\gamma\omega_3)$. La prima eventualità non si può presentare perchè la V_3 apparterrebbe ad S_9 al più. Nel secondo caso si conclude che una delle due forme $\Phi^{(3)}$ (oppure la sola) è $\Phi^{(3)}=\omega^3{}_3$ e l'altra (quando esista) è $\Phi^{(3)}=2a_3\alpha\omega_1\omega_3{}^2+2a_4\alpha\omega_2\omega_3{}^2$.

Si hanno dunque ora le relazioni

$$
(4) \qquad \begin{gathered}
\omega_{48} = \omega_{58} = \omega_{68} = 0 \quad , \quad \omega_{78} = \omega_3 \\
\omega_{49} = 0 \quad , \quad \omega_{59} = a_{39}\omega_3 \quad , \quad \omega_{69} = a_{49}\omega_3 \\
\omega_{79} = a_{39}\omega_1 + a_{49}\omega_2 \\
\omega_{4\alpha} = \omega_{5\alpha} = \omega_{6\alpha} = \omega_{7\alpha} = 0 \qquad \text{per } \alpha = 10, \dots, n
\end{gathered}
$$

le a_{39}, a_{49} potendo essere nulle. Per differenziazione esterna si ricava dalle (4)

$$
(5) \qquad \begin{aligned}
\omega_{13} - a_{39}\omega_{98} &= \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 + \alpha_3\omega_3 \\
\omega_{23} - a_{49}\omega_{98} &= \alpha_2\omega_1 + \alpha_4\omega_2 + \alpha_5\omega_3 \\
a_{39}\omega_{13} + a_{39}\omega_{57} &= \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \beta_3\omega_3 \\
a_{39}\omega_{23} + a_{49}\omega_{57} &= \beta_2\omega_1 + \beta_4\omega_2 + \beta_5\omega_3 \\
a_{49}\omega_{13} + a_{39}\omega_{67} &= \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 + \gamma_3\omega_3 \\
a_{49}\omega_{23} + a_{49}\omega_{67} &= \gamma_2\omega_1 + \gamma_4\omega_2 + \gamma_5\omega_3 \\
\omega_{57} - a_{39}\omega_{98} &= k\omega_3 \\
\omega_{67} - a_{49}\omega_{98} &= l\,\omega_3
\end{aligned}
$$

Se ne ricava che, se a_{49} ed a_{39} non si annullano,

$$
\frac{\beta_2}{a_{39}} = \frac{\gamma_2}{a_{49}}
$$

e si conclude come prima. Alla stessa conclusione si perviene, fatte le debite modificazioni nelle (5), se a_{39} o a_{49} o entrambe sono nulle.

3. Passiamo ora a considerare il secondo caso e cioè quello in cui la V_3 soddisfa ad un'altra o ad altre due equazioni di LAPLACE oltre alle solite due ed eventualmente anche ad equazioni del 3° ordine che non siano conseguenze di quelle di LAPLACE a cui soddisfa.

Anche ora, tenendo presente l'ipotesi che V_3 appartiene ad S_n con $n > 10$, e ricordando che le forme polari delle $\Phi^{(m)}$ appartengono al sistema lineare delle $\Phi^{(m-1)}$ si vede facilmente che una delle forme $\Phi^{(2)}$ è Φ_3^2 e poi che una delle forme $\Phi^{(3)}$ è ω_3^3. Escluse quelle, le forme $\Phi^{(2)}$ sono altre due al più del tipo $\alpha\omega_1\omega_2 + \beta\omega_1\omega_3 + \gamma\omega_2\omega_3$ e di forme $\Phi^{(3)}$ ve n'è un'altra al più del tipo $2a_{3\alpha}\omega_1\omega_3^2 + 2a_{4\alpha}\omega_2\omega_3^2$ (escludendo sempre anche il caso che V_3 sia luogo di piani). Ma allora si possono ancora ripetere tali e quali i calcoli fatti nel n. 2 e concludere come allora. Il teorema è così completamente dimostrato.