Bollettino
Unione Matematica Italiana

Lothar Koschmieder

Sui determinanti ortosimmetrici di funzioni trigonometriche e iperboliche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.3, p. 266–270.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_3_266_0>

Sui determinanti ortosimmetrici di funzioni trigonometriche e iperboliche.

Nota di LOTHAR KOSCHMIEDER (a Baghdad)

Sunto. - *Si dimostra che alcuni determinanti d'ordine* m *del tipo indicato nel titolo sono nulli per* $m \geq 3$.

1. Recentemente diversi autori hanno trattato i determinanti simmetrici del secondo ordine i cui elementi sono tre termini susseguentesi delle più note successioni di funzioni ortogonali di una variabile reale x; essi hanno ricercato sopra tutto il loro segno, seguendo una ricerca di *P.* TURÁN [1] Le più semplici successioni del tipo ricordato sono:

$$\{\sin nx\},\ \left\{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right\},\ \left\{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right\},\ \{\cos nx\}\quad (n=1, 2, \ldots).$$

Dai risultati generali ottenuti e anche direttamente si ha:

$$\begin{vmatrix} \sin(n-1)x & \sin nx \\ \sin nx & \sin(n+1)x \end{vmatrix} = \tag{1.1}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x & \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x \\ \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x & \sin\left(n+\frac{3}{2}\right)x \end{vmatrix} = -\sin^2 x,$$

$$\begin{vmatrix} \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x & \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x \\ \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x & \cos\left(n+\frac{3}{2}\right)x \end{vmatrix} = \tag{1.2}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos(n-1)x & \cos nx \\ \cos nx & \cos(n+1)x \end{vmatrix} = -\sin^2 x.$$

---

[1] Vedi P. TURÁN, Časopis Mat. Fys, Praha 75 (1950), 113-122, in particolare pagg. 115-16, 119-20.

Con ciò si conferma che questi quattro determinanti sono non positivi, e risultano nulli solo per $x = j\pi$, con j intero.

2. Più in generale, indicati con α e β costanti reali e con k, l, q, r numeri interi non negativi, si consideri il determinante:

$$S(k, l, q, r; \alpha, \beta; x) = S = \begin{vmatrix} \sin[\alpha + (k+q)\beta]x & \sin[\alpha + (k+r)\beta]x \\ \sin[\alpha + (l+q)\beta]x & \sin[\alpha + (l+r)\beta]x \end{vmatrix}. \tag{2.1}$$

Esso si può mettere nella forma:

$$S = -\sin(k-l)\beta x \sin(q-r)\beta x. \tag{2.2}$$

Ciò si effettua nel modo più rapido con il seguente calcolo ([2]):

$$S = \sin[\alpha + (k+q)\beta]x \sin[\alpha + (l+r)\beta]x - \sin[\alpha + (k+r)\beta]x \sin[\alpha +$$
$$+ (l+q)\beta]x = \frac{1}{2}\{\cos(k+q-l-r)\beta x - \cos(2\alpha + k + q +$$
$$+ l + r)\beta x - \cos(k + r - l - q)\beta x + \cos(2\alpha + k + q + l + r)\beta x\},$$

e ciò porta alla (2.2). Il secondo fattore di questa relazione può mettersi sotto la forma — che utilizzeremo in seguito — di determinante; infatti con h qualsiasi, p. es. $h \geq 0$ e intero, è $(q-r)\beta =$ $= \alpha + (h+q)\beta - [\alpha + (h+r)\beta]$, e si può sostituire alla (2.2) la

$$S = -\sin(k-l)\beta x \begin{vmatrix} \sin[\alpha + (h+q)\beta]x & \sin[\alpha + (h+r)\beta]x \\ \cos[\alpha + (h+q)\beta]x & \cos[\alpha + (h+r)\beta]x \end{vmatrix}. \tag{2.3}$$

Un risultato del tutto analogo vale per il determinante

$$C(k, l, q, r; \alpha, \beta; x) = C = \begin{vmatrix} \cos[\alpha + (k+q)\beta]x & \cos[\alpha + (k+r)\beta]x \\ \cos[\alpha + (l+q)\beta]x & \cos[\alpha + (l+r)\beta]x \end{vmatrix}. \tag{2.4}$$

Esso ha il medesimo valore (2.2) come S; poichè risulta ([2]):

$$C = \cos[\alpha + (k+q)\beta]x \cos[\alpha + (l+r)\beta]x - \cos[\alpha + (k+r)\beta]x \cos[\alpha +$$
$$+ (l+q)\beta]x = \frac{1}{2}\{\cos(2\alpha + k + q + l + r)\beta x + \cos(k + q -$$
$$- l - r)\beta x - \cos(2\alpha + k + q + l + r)\beta x - \cos(k + r - l - q)\beta x\},$$

$$C = -\sin(k-l)\beta x \sin(q-r)\beta x. \tag{2.5}$$

([2]) Questo procedimento mi è stato indicato da alcuni partecipanti al colloquio Matematico in Baghdad, in cui io ho riferito sull'oggetto di questa nota il 16-9-53.

Dunque anche

$$C(k, l, q, r; \alpha, \beta; x) = S(k, l, q, r; \alpha, \beta; x) \tag{2.6}$$

si può esprimere nella forma (2.3).

Come caso particolare delle formule (2.2), (2.5), se si pone in esse $k = q = 0$, $l = r = 1$, si ottiene

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha x & \sin (\alpha + \beta)x \\ \sin (\alpha + \beta)x & \sin (\alpha + 2\beta)x \end{vmatrix} = - \sin^2 \beta x, \tag{2.7}$$

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha x & \cos (\alpha + \beta)x \\ \cos (\alpha + \beta)x & \cos (\alpha + 2\beta)x \end{vmatrix} = - \sin^2 \beta x. \tag{2.8}$$

Con $\alpha = n - 1$ e $\alpha = n - \frac{1}{2}$, $\beta = 1$ si ritorna alle (1.1) e (1.2).

3. Oggetto di questo lavoro sono i determinanti ortosimmetrici dell'm-simo ordine, formati sul tipo di quelli (2.7) e (2.8), la cui particolarità consiste nel fatto che essi su ogni linea (diagonale) perpendicolare alla diagonale principale posseggono sempre lo stesso elemento [3]. Questi determinanti sono

$$A^{(m)}(\alpha, \beta; x) = \tag{3.1}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin \alpha x & \sin (\alpha + \beta)x & \dots \sin [\alpha + (m-1)\beta]x \\ \sin (\alpha + \beta)x & \sin (\alpha + 2\beta)x & \dots \sin [\alpha + m\beta]x \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots \\ \sin [\alpha + (m-1)\beta]x & \sin (\alpha + m\beta)x & \dots \sin [\alpha + (2m-2)\beta]x \end{vmatrix},$$

$$B^{(m)}(\alpha, \beta; x) = \tag{3.2}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \alpha x & \cos (\alpha + \beta)x & \dots \cos [\alpha + (m-1)\beta]x \\ \cos (\alpha + \beta)x & \cos (\alpha + 2\beta)x & \dots \cos [\alpha + m\beta]x \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots\dots \\ \cos [\alpha + (m-1)\beta]x & \cos (\alpha + m\beta)x & \dots \cos [\alpha + (2m-2)\beta]x \end{vmatrix}.$$

Può interessare notare che essi per $m \geq 3$ risultano tutti eguali a zero come ora mostreremo.

---

(3) Cfr., p. es., A. C. AITKEN, *Determinants and Matrices*, Edinburgh and London 1949, 121-123. Nel caso $n = 2$ un determinante simmetrico è anche ortosimmetrico.

4. Trattiamo prima il caso $m = 3$. Per dimostrare il teorema I: $A^{(3)}(\alpha, \beta; x) = 0$ e il teorema II: $B^{(3)}(\alpha, \beta; x) = 0$, si sviluppi $A^{(3)}$ per la prima riga. I complementi algebrici dei suoi elementi sono, per la (2.1) e la (2.3), quando si faccia $h = 0$:

$$A_{11} = S(1, 2, 1, 2; \alpha, \beta; x) = \sin \beta x \begin{vmatrix} \sin(\alpha + \beta)x & \sin(\alpha + 2\beta)x \\ \cos(\alpha + \beta)x & \cos(\alpha + 2\beta)x \end{vmatrix}.$$

$$A_{12} = S(1, 2, 2, 0; \alpha, \beta; x) = \sin \beta x \begin{vmatrix} \sin(\alpha + 2\beta)x & \sin \alpha x \\ \cos(\alpha + 2\beta)x & \cos \alpha x \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = S(1, 2, 0, 1; \alpha, \beta; x) = \sin \beta x \begin{vmatrix} \sin \alpha x & \sin(\alpha + \beta)x \\ \cos \alpha x & \cos(\alpha + \beta)x \end{vmatrix}.$$

Questa disposizione ciclica degli $A_{1\mu}$ ($\mu = 1, 2, 3$) permette di scrivere $A^{(3)}$ nella forma

$$A^{(3)} = \sin \beta x \begin{vmatrix} \sin \alpha x & \sin(\alpha + \beta)x & \sin(\alpha + 2\beta)x \\ \sin \alpha x & \sin(\alpha + \beta)x & \sin(\alpha + 2\beta)x \\ \cos \alpha x & \cos(\alpha + \beta)x & \cos(\alpha + 2\beta)x \end{vmatrix} = 0.$$

Il teorema II si dimostra in egual modo. Per le (2.4) e (2.6) risulta, con notazioni evidenti, $B_{1\mu} = A_{1\mu}$. Allora $B^{(3)}$ si può scrivere come un determinante in cui la prima e la terza riga coincidono, e i termini di queste risultano $\cos \alpha x$, $\cos(\alpha + \beta)x$, $\cos(\alpha + 2\beta)x$. Ne segue $B^{(3)} = 0$.

5. Supponiamo ora che nelle (3.1) e (3.2) sia $m > 3$. Allora, come già abbiamo indicato nel n. 3, valgono il teorema III:

$$A^{(m)}(\alpha, \beta; x) = 0.$$

e il teorema IV:

$$B^{(m)}(\alpha, \beta; x) = 0.$$

La caratteristica di questi due determinanti è due.

Ciò risulterà dimostrato tosto che si sia fatto vedere che ogni minore del terzo ordine $M^{(3)}$ di $A^{(m)}$ e $B^{(m)}$ è uguale a zero. Quando ci si sia accertati di ciò basta sviluppare $A^{(m)}$ e $B^{(m)}$, secondo il teorema di Laplace, in una somma di prodotti $L^{(m-3)}M^{(3)}$, dove gli $L^{(m-3)}$ sono i complementi algebrici dei minori $M^{(3)}$ estratti, per esempio, dalle ultime tre righe.

L'annullarsi di $M^{(3)}$ si rileva come segue: sia $M^{(3)}$ il minore formato con gli elementi comuni alla $(h + 1)$-esima, $(k + 1)$-esima e $(l+1)$-esima riga $(0 \leq h < k < l \leq m-1)$ e alla $(p+1)$-esima, $(q+1)$-esima e $(r+1)$-esima colonna $(0 \leq p < q < r \leq m-1)$ del determinante $A^{(m)}$,

$$M^{(3)} = \begin{vmatrix} \sin[\alpha+(h+p)\beta]x & \sin[\alpha+(h+q)\beta]x & \sin[\alpha+(h+r)\beta]x \\ \sin[\alpha+(k+p)\beta]x & \sin[\alpha+(k+q)\beta]x & \sin[\alpha+(k+r)\beta]x \\ \sin[\alpha+(l+p)\beta]x & \sin[\alpha+(l+q)\beta]x & \sin[\alpha+(l+r)\beta]x \end{vmatrix}.$$

Se si sviluppa questo secondo gli elementi della prima riga, il complemento del primo elemento, per le (2.1) e (2.3), è:

$$S(k, l, q, r; \alpha, \beta; x) =$$

$$= -\sin(k-l)\beta x \cdot \begin{vmatrix} \sin[\alpha+(h+q)\beta]x & \sin[\alpha+(h+r)\beta]x \\ \cos[\alpha+(h+q)\beta]x & \cos[\alpha+(h+r)\beta]x \end{vmatrix};$$

risultati analoghi, in successione ciclica valgono per gli altri elementi. Allora $M^{(3)}$ si può scrivere nella forma:

$$M^{(3)} = -\sin(k-l)\beta x \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \sin[\alpha+(h+p)\beta]x & \sin[\alpha+(h+q)\beta]x & \sin[\alpha+(h+r)\beta]x \\ \sin[\alpha+(h+p)\beta]x & \sin[\alpha+(h+q)\beta]x & \sin[\alpha+(h+r)\beta]x \\ \cos[\alpha+(h+p)\beta]x & \cos[\alpha+(h+q)\beta]x & \cos[\alpha+(h+r)\beta]x \end{vmatrix} = 0.$$

La dimostrazione del teorema IV si effettua in modo del tutto analogo, con la sola differenza che il seno nella prima riga è sostituito dal coseno, cosicchè ora coincidono la prima e la terza riga.

6. Niente vieta di dare alla variabile valori complessi. Se si prende questa puramente immaginaria, se si sostituisce cioè x con ix, con x reale, si cambia $\sin\gamma x$, per γ reale, in $i\,\mathrm{sh}\gamma x$, $\cos\gamma x$ in $\mathrm{ch}\gamma x$, e i risultati ottenuti si mutano in altri che si riferiscono alle funzioni iperboliche. Quando si siano scritte queste in luogo delle funzioni trigonometriche i due determinanti (1.1) hanno il valore $-\mathrm{sh}^2 x$, e gli (1.2) hanno invece il valore $+\mathrm{sh}^2 x$. La formula (2.2) conserva la sua forma, la (2.5) cambia di segno nel secondo membro. I teoremi I, II, III, IV si enunciano per le funzioni iperboliche in modo del tutto analogo a quello effettuato per le funzioni trigonometriche.