Bollettino
Unione Matematica Italiana

Antonio De Castro

Un teorema di confronto per l'equazione differenziale delle oscillazioni di rilassamento.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.3, p. 280–282.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_3_280_0>

Un teorema di confronto per l'equazione differenziale delle oscillazioni di rilassamento.

Nota di ANTONIO DE CASTRO (a Madrid)

Sunto. - *Si dimostra un teorema di confronto per l'esistenza e la limitazione delle soluzioni periodiche per equazioni differenziali della forma* $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$.

1. Consideriamo l'equazione differenziale generale delle oscil-

([28]) Risulta, sempre per $k = 5/2$ e con la approssimazione indicata nella nota prec., $T \cong 12,22/\varepsilon\omega$. Come si è già osservato a proposito della $\gamma(x)$, non è agevole esprimere esplicitamente T in funzione di k; del pari non agevole, se pure di un certo interesse, è lo studio (di cui potrà eventualmente accennarsi in altra nota) del comportamento della funzione $T(k)$ al variare del parametro k.

([29]) Si cfr., per il calcolo di tali scarti, J. HAAG, Op. cit. in nota (5).

lazioni di rilassamento

$$\ddot{x}_1 + f_1(x_1, \dot{x}_1)\dot{x}_1 + g(x_1) = 0 \tag{1.1}$$

dove f_1 e g sono continue nei loro argomenti, g lipschitziana, in ogni dominio limitato e tale che sia

$$xg(x) > 0 \quad \text{per} \quad x \neq 0, \qquad \int_0^{\pm\infty} g(x)dx = +\infty.$$

L'equazione (1,1) è equivalente al sistema del primo ordine

$$\dot{x}_1 = v_1, \qquad \dot{v}_1 = -f_1(x_1, v_1)v_1 - g(x_1) \tag{1.2}$$

e l'equazione delle caratteristiche è

$$\frac{dv_1}{dx} = + f_1(x, v_1) - \frac{g(x)}{v_1}. \tag{1.3}$$

Supponiamo che (1.1) abbia almeno una soluzione periodica, cioè vi sia almeno una curva integrale chiusa C (nel piano xv) della equazione (1.3).

Consideriamo adesso quest'altra equazione differenziale

$$\ddot{x}_2 + f_2(x_2, \dot{x}_2)\dot{x}_2 + g(x_2) = 0 \tag{1.4}$$

con f_2 continua nei suoi argomenti e lipschitziana in ogni dominio limitato, equivalente al sistema del primo ordine

$$\dot{x}_2 = v_2, \qquad \dot{v}_2 = -f_2(x_2, v_2)v_2 - g(x_2) \tag{1.5}$$

e supponiamo che sia

$$f_2(x, v) > f_1(x, v) \tag{1.6}$$

$$f_2(0, 0) < 0 \tag{1.7}$$

Dimostriamo il

Teorema – *L'equazione differenziale* (1.4) *ha almeno una soluzione periodica e la corrispondente curva integrale nel piano* xv *è non esterna alla curva* C.

Infatti, l'equazione delle caratteristiche di (1.4) è

$$\frac{dv_2}{dx} = -f_2(x, v_2) - \frac{g(x)}{v_2}$$

Segue subito da (1.6), (1.3) e (1.8) che la pendenza delle curve integrali di (1.8) nei punti dove è $\frac{dv}{dx} \neq \infty$ è minore della pendenza delle curve integrali di (1.3) nei punti di intersezione; cioè le curve integrali di (1.8) tagliano C penetrando nel suo dominio interno. Nei punti dove $\frac{dv}{dx} = \infty$ si ragiona in modo analogo a quanto si è detto per $\frac{dx}{dv}$.

Ciò premesso, consideriamo la funzione $\lambda(x, v)$ (energia associata al moto rappresentato da (1.4))

$$\lambda(x_2, v_2) = \frac{1}{2} v_2^2 + \int_0^{x_2} g(x) dx$$

Sarà per $x_2 = x_2(t)$, ricordando (1.5), nell'intorno di (0, 0)

$$\frac{d\lambda}{dt} = v_2 \dot{v}_2 + g(x_2) v_2 = - f_2(x_2, v_2) v_2^2 > 0$$

per cui, in un intorno abbastanza piccolo di (0, 0), le curve integrali di (1.4) che partono da un punto di una curva chiusa $\lambda(x, v) = cte.$ per t crescente passano nel dominio esterno.

Segue da quanto abbiamo dimostrato, applicando il teorema di Bendixson, che (1.8) ha almeno una curva integrale chiusa, cioè (1.4) una integrale periodica che deve essere interna a quella di (1.1).

2. Corollarii.

I. *Se si hanno tre equazioni differenziali*

$$\ddot{x}_1 + f_1(x_1, \dot{x}_1)\dot{x}_1 + g(x_1) = 0 \tag{2.1}$$

$$\ddot{x}_2 + f_2(x_2, \dot{x}_2)\dot{x}_2 + g(x_2) = 0 \tag{2.2}$$

$$\ddot{x}_3 + f_3(x_3, \dot{x}_3)\dot{x}_3 + g(x_3) = 0 \tag{2.3}$$

dove f_i *e* g *sono continue e lipschitziane nei loro argomenti in ogni dominio limitato, si verifica*

$$f_1(x, \dot{x}) < f_2(x, \dot{x}) < f_3(x, \dot{x}) \qquad f_3(0, 0) < 0, \tag{2.4}$$

e l'equazione (2.1) *ha una soluzione periodica*; *anche ciascuna delle altre due hanno almeno una soluzione periodica. La soluzione di* (2.2) *se trova nel piano* xv, *nella corona limitata dalla soluzione periodica di* (2.1) *e dalla soluzione periodica di* (2.3).

II. *Se si hanno tre equazioni differenziali* (2.1) (2.2) (2.3), *si verifica* (2.4), *e* (2.1) (2.3) *hanno almeno una soluzione periodica, la* (2.2) *ha anche una soluzione periodica nella corona limitata dalle due soluzioni periodiche considerate.*