Bollettino Unione Matematica Italiana

Marialuisa De Socio

Sulle frequenze critiche in una guida d'onda.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.3, p. 283–285.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_3_283_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

Sulle frequenze critiche in una guida d'onda.

Nota di Marialuisa De Socio (a Bologna)

Sunto. - *Applicando le inegualianze isoperimetriche di* Polya *e* Szegö *si deducono alcune limitazioni per le frequenze critiche delle onde elettromagnetiche guidate.*

1. È noto come un campo elettromagnetico possa propagarsi in una guida d'onda (con sezione a connessione semplice) solo per modi *TM* e *TE*, cioè tali che, rispettivamente, il campo magnetico e il campo elettrico siano perpendicolari alla direzione di propagazione.

È pure noto che possono propagarsi modi *TM* e modi *TE* solo se la frequenza del campo elettromagnetico supera certi valori ν_c e ν_c' che diremo frequenze critiche dei modi *TM* e *TE* (1).

Ora ν_c è data da:

$$\nu_c = \frac{cK_0}{2\pi} \tag{1}$$

dove c è la velocità delle onde libere in un mezzo identico a quello che riempie la guida, K_0 è il più piccolo autovalore positivo dell'equazione in φ:

$$\Delta\varphi + K_0^2\varphi = 0 \tag{2}$$

valida in un dominio (D) identico alla sezione normale della guida considerata e con $\varphi = 0$ alla frontiera di (D).

La frequenza critica ν_c' dei modi *TE* è espressa ancora dalla (1) dove K_0 va sostituito mediante il più piccolo autovalore positivo K_0' di (2) con la condizione al contorno $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$.

Le proprietà degli autovalori dell'equazione (2), con la condizione al contorno $\varphi = 0$, equazione che si incontra nella teoria delle membrane vibranti fissate al bordo, sono state oggetto di vari studi in relazione a domini di ugual area o ugual perimetro (2).

(1) In altre parole le frequenze critiche ν_c e ν_c' sono rispettivamente le più basse frequenze dei modi *TM* e *TE* che possono propagarsi nella guida.

(2) Si veda: Polya-Szegö, *Isoperimetric inequalities in Mathematical Physics*, « Annals of Mathematics Studies », n. 27, Princeton, 1951.

Su tali risultati ha recentemente richiamato l'attenzione il prof. A. Masotti in una conferenza tenuta al Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

Si ha intanto che, a parità di area, ed anche a parità di perimetro, K_0 ha il valore minimo quando (D) è circolare e precisamente si ha:

$$(3) \qquad K_0 \geq j\left(\frac{A}{\pi}\right)^{-1/2} \qquad K_0 \geq \frac{2\pi}{L} j$$

dove j è la più bassa radice positiva della funzione di Bessel $J_0(x)$, A ed L rispettivamente l'area e il perimetro di (D).

Questi risultati, riportati alla teoria delle guide, ci forniscono un estremo inferiore per la frequenza critica ν_c dei modi TM. si ha cioè:

$$(4) \qquad \nu_c \geq j\frac{c}{2\pi}\left(\frac{A}{\pi}\right)^{-1/2}, \qquad \nu_c \geq j\frac{c}{L}$$

dove il segno di eguaglianza vale solo per le sezioni circolari.

Poichè, in pratica, è opportuno avere la frequenza critica dei modi TM più piccola possibile, si ha che: *a parità di area o di perimetro della sezione della guida* (cioè, in quest'ultimo caso, a parità di materiale adoperato per realizzare la guida stessa) *è più conveniente la guida a sezione circolare.*

2. Recentemente Szegö [3] ha indicato alcune proprietà per K_0'. A parità di area, K_0' ha il valore massimo quando la guida è a sezione circolare; si ha cioè, se p è la più piccola radice positiva di $J_1'(x)$ ($J_1'(x)$ derivata della funzione $J_1(x)$ di Bessel):

$$(5) \qquad K_0' \leq p\left(\frac{A}{\pi}\right)^{-1/2}$$

e, confrontando con (3):

$$(6) \qquad K_0' \leq \frac{p}{j} K_0;$$

il segno di uguaglianza è valido solo per i domini circolari.

Sostituiamo ora la (5) nella espressione di ν_c' (data da (1) con K_0' in luogo di K_0), tenendo presente $p < j$ si ha:

$$(7) \qquad \nu_c' \leq \frac{cp}{2\pi}\left(\frac{A}{\pi}\right)^{-1/2}, \qquad \nu_c' < \nu_c$$

[3] G. Szegö, *Inequalities for certain eigenvalues of a membrane of given area*, « Journal of Rational Mechanics and Analysis », Vol. 3, n. 3, 1954.

onde il teorema: *la frequenza critica delle onde* TE *è sempre inferiore a quella delle onde* TM. Questa proprietà, già osservata per le guide a sezione circolare e rettangolare, viene così estesa alle guide a sezione qualunque.

Dalla seconda delle (7), se è nota ν_c', si ha poi un estremo inferiore per ν_c, inoltre, poichè l'eguaglianza (6) sussiste solo nel caso di sezioni circolari, si ha che: *il rapporto fra la frequenza critica dei modi* TE *e* TM *è massimo per le sezioni circolari.*

Infine, in base alla (5), possiamo concludere. che per i modi *TE*, a parità di area, la sezione meno conveniente è quella circolare.

3. I risultati precedenti si possono mettere in relazione con altre limitazioni per ν_c e ν_c' trovate dal GRAFFI [4]:

$$\nu_c' > \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{24}{7l^2}}, \qquad \nu_c \geq c\,\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2ab} \tag{8}$$

dove l è la massima dimensione della sezione della guida, a e b sono i lati di un rettangolo circoscritto alla sezione della guida.

Combinando la prima delle (8) con la prima delle (7) si ha intanto un intervallo entro il quale è sempre compresa la ν_c'.

La seconda delle (8) e la prima delle (4) definiscono entrambe una limitazione inferiore per ν_c. Ricerchiamo ora quale delle due è più conveniente.

Posto $ab = \alpha^2 A$, dove α è un numero, si ha che la prima delle (4) è preferibile alla seconda delle (8) se è:

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab} < j\sqrt{\frac{1}{A\pi}}$$

ossia, posto $\frac{a}{b} = y$ e, per fissare le idee, $a > b$, se è $\alpha^4 \geq \frac{4\pi^2}{j^4}$ e

$$1 < y < \frac{j^2\alpha^2}{2\pi} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{j^4\alpha^4}{\pi^2} - 4}.$$

In particolare, nel caso in cui la sezione sia un'ellisse di semiassi a e b, e $\alpha^2 = \frac{4}{\pi}$, risulta più utile la (3) quando è:

$$1 < y < 1{,}771.$$

[4] D. GRAFFI, *Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche entro tubi conduttori*, « Memoria dell'Acc. delle Scienze di Bologna », Serie X, Vol. 2°, pp. 47-53, 1945