Bollettino
Unione Matematica Italiana

Guido Zappa

Sopra un'estensione di Wielandt del teorema di Sylow.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.4, p. 349–353.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_4_349_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sopra un'estensione di Wielandt del teorema di Sylow.

Nota di GUIDO ZAPPA (a Firenze)

Sunto. - *L'A., prendendo lo spunto da una recente estensione del teorema di* SYLOW, *dovuta al* WIELANDT, *espone un'altra estensione dello stesso teorema, che a quella si ricollega.*

1. Il teorema di SYLOW ha dato luogo, come è noto, a vari tipi di estensioni, sia pure per particolari tipi di gruppi; la più famosa è quella di PH. HALL [2], in base alla quale, se G è un gruppo finito risolubile d'ordine g, ed m è un divisore di g che sia primo con g/m, esistono sottogruppi di G d'ordine m, questi son tutti tra loro coniugati, ed inoltre ogni sottogruppo di G il cui ordine divide m è contenuto in un sottogruppo d'ordine m. Notevole è anche la generalizzazione di tale teorema di HALL dovuta a S. ČUNIHIN [1], in base alla quale, se Π è un insieme finito di numeri primi e G un gruppo finito Π-risolubile (cioè tale che ogni suo fattore di composizione o è un numero primo appartenente a Π, o è primo con ogni numero primo appartenente a Π) valgono i fatti indicati nel teorema di HALL, limitatamente a quei valori di m i cui fattori primi appartengono a Π.

Recentemente, H. WIELANDT [4] ha ottenuto un'altra interessantissima estensione, nella quale non si pone alcuna limitazione alla natura di G, bensì solo a quella dei sottogruppi considerati. Il teorema di WIELANDT si enuncia così:

« Se il gruppo G d'ordine g contiene un sottogruppo speciale H il cui ordine h è primo col suo indice g/h, e se M è un sottogruppo di G, il cui ordine m è un divisore di h, esiste un elemento γ di G con la proprietà $M \subseteqq \gamma^{-1}H\gamma$ ».

Lo stesso WIELANDT, al termine della sua Nota. osserva che si pone il problema di vedere se il suo risultato si possa estendere al caso in cui il sottogruppo H è supersolubile, dopo aver notato che esso non vale più quando si supponga solo che H sia risolubile, come mostra un esempio, da lui riportato, di HALL.

Nella presente Nota, mostro come una parte del teorema di WIELANDT si possa estendere al caso in cui H è supersolubile, anzi a quello in cui H è dispersibile.

Chiamo, con O. ORE [3], *dispersibile* un gruppo H d'ordine $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$ $(p_1 > p_2 > \ldots > p_r)$, se, per ogni i tale che $1 \leqq i \leqq r$ H contiene un sottogruppo normale d'ordine $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_i^{\alpha_i}$.

Chiamo poi *sottogruppo di* HALL di un gruppo finito G un sottogruppo il cui ordine è primo col suo indice in G. Ogni sottogruppo di SYLOW è evidentemente anche di HALL.

Ciò premesso, provo il seguente :

TEOREMA. - *Se M ed H sono due sottogruppi di* HALL *dispersibili di un gruppo finito G, tali che l'ordine di M divida quello di H, M è contenuto in un sottogruppo di G coniugato ad H.*

Poichè [3], [5] ogni gruppo supersolubile è dispersibile, il teorema sussiste anche se M ed H si suppongono, anzichè dispersibili, supersolubili. Resta però aperto il problema posto da WIELANDT, per il che sarebbe necessario togliere dal nostro teorema l'ipotesi che M sia di HALL e quella che esso sia dispersibile. L'ipotesi della dispersibilità di H non può, nemmeno nel nostro teorema, sostituirsi con quella della sua risolubilità, come prova il sopra ricordato esempio di HALL.

2. Alla dimostrazione del sopra enunciato teorema bisogna premettere quella di alcuni semplici lemmi.

1) *Se H è un gruppo dispersibile d'ordine $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$ $(p_1 > p_2 > \ldots > p_r)$, in H c'è un solo sottogruppo normale d'ordine $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_i^{\alpha_i} = k_i$ contenente tutti e soli gli elementi di H il cui ordine divide k_i.*

Sia N un sottogruppo di H d'ordine $k_i = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_i^{\alpha_i}$. Ogni elemento ν di H il cui ordine sia potenza di un numero primo p_j con $j \leqq i$ è contenuto in un sottogruppo di SYLOW di H d'ordine $p_j^{\alpha_j}$, che diremo S; d'altra parte N deve contenere anch'esso un sottogruppo $\overline{S}$ d'ordine $p_j^{\alpha_j}$, necessariamente coniugato ad S rispetto ad H: si avrà allora $\gamma^{-1}\overline{S}\gamma = S$, con γ conveniente elemento di H. Ma essendo N normale, S deve allora essere in N al pari di $\overline{S}$. Pertanto ν è in N, e con esso ogni elemento il cui ordine è potenza di un numero primo p_j $(j \leqq i)$, e di conseguenza è in N ogni elemento il cui ordine divida k_i.

2) *Se H è un gruppo dispersibile d' ordine $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$ $(p_1>p_2>\dots>p_r)$, ed S è un suo sottogruppo di* SYLOW *d'ordine $p_i^{\alpha_i}$, l' ordine del normalizzante N di S in H è divisibile per $p_i^{\alpha_i}p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\dots p_r^{\alpha_r}$.*

Sia M il sottogruppo normale di H d'ordine $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_i^{\alpha_i}$, che, per il lemma precedente, contiene necessariamente S, e sia γ un elemento qualunque di H. Il sottogruppo $\gamma^{-1}S\gamma$ deve essere in M, perchè M è normale, e d'altra parte, essendo esso un sottogruppo di SYLOW di M, al pari di S, deve esistere un elemento μ di M, tale che $\mu^{-1}S\mu=\gamma^{-1}S\gamma$. Allora $\nu=\gamma\mu^{-1}$ trasforma S in sè, onde è in N; e si avrà $\gamma=\nu\mu$. Ne segue, essendo γ qualunque in H, che $H=NM$, onde l'ordine di N deve esser divisibile, oltre che, naturalmente, per $p_i^{\alpha_i}$, anche per $p_{i+1}^{\alpha_{i+1}},\dots,\ p_r^{\alpha_r}$, dal che segue l' asserto.

3) *Ogni sottogruppo di un gruppo dispersibile è dispersibile.*

Sia H un gruppo dispersibile d'ordine $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_r^{\alpha_r}$, con $p_1>$ $>p_2>\dots>p_r$, e sia M un suo sottogruppo d'ordine $p_{i_1}^{\beta_{i_1}}\dots p_{i_s}^{\beta_{i_s}}$, con $1\leqq i_1<i_2<\dots<i_s\leqq r$, e $\beta_{i_h}\leqq\alpha_{i_h}$ $(h=1,\dots,\ s)$. Basterà mostrare che, per ogni h, M ha un sottogruppo normale d'ordine $p_{i_1}^{\beta_{i_1}}\dots p_{i_h}^{\beta_{i_h}}$. Detto N il sottogruppo normale di H d'ordine $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_{i_h}^{\alpha_{i_h}}$, contenente, per il lemma precedente, tutti gli elementi di H il cui periodo divide tale ordine, si ha che il sottogruppo $N\cap M$ è normale in M, e il suo ordine è $p_{i_1}^{\beta_{i_1}}\dots p_{i_h}^{\beta_{i_h}}$, perchè da un lato deve contenere tutti i sottogruppi di SYLOW di M il cui ordine è potenza di $p_{i_1},\ p_{i_2},\dots,\ p_{i_h}$, e d'altro canto non può contenere alcun elemento il cui ordine non divida $p_{i_1}^{\beta_{i_1}}\dots p_{i_h}^{\beta_{i_h}}$. Il lemma è così provato.

Poichè ogni gruppo dispersibile ammette una catena principale i cui gruppi fattoriali sono p-gruppi, è evidente che:

4) *Ogni gruppo dispersibile è risolubile.*

3. Sia $p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}$ l'ordine di H, con $p_1>p_2>\dots>p_r$. Essendo H sottogruppo di HALL, $p_i^{\alpha_i}$ $(i=1,\ 2,\dots,\ r)$ sarà la massima potenza di p_i che divide l'ordine di G; e poichè anche M è sottogruppo di HALL, il suo ordine sarà del tipo $p_{i_1}^{\alpha_{i_1}}\dots p_{i_s}^{\alpha_{i_s}}$ con $1\leqq i_1<\dots<i_s\leqq r$. Sia S un sottogruppo di SYLOW di M, d'ordine $p_{i_1}^{\alpha_{i_1}}$, necessariamente normale in M, perchè M è dispersibile. Un coniugato $\gamma^{-1}S\gamma$ di S deve essere in H, pel teorema di SYLOW, onde S è nel sottogruppo $\overline{H}=\gamma H\gamma^{-1}$, coniugato ad H. Essendo $\overline{H}$ dispersibile al pari di H, il normalizzante F di S in $\overline{H}$ deve avere ordine divisibile per $p_{i_1}^{\alpha_{i_1}}p_{i_1+1}^{\alpha_{i_1+1}}\dots p_r^{\alpha_r}$, in base al lemma 2).

Il normalizzante N di S in G contiene, per quanto si è visto, F ed M. Inoltre F, quale sottogruppo del gruppo dispersibile $\overline{H}$, è dispersibile (lemma 3), e quindi risolubile (lemma 4), onde contiene, per il ricordato teorema di HALL, un sottogruppo R d'ordine $p_{i_1}^{\alpha_{i_1}} p_{i_2}^{\alpha_{i_2}} \dots p_{i_s}^{\alpha_{i_s}}$, il quale sarà dispersibile, perchè sottogruppo del gruppo dispersibile $\overline{H}$ (lemma 3).

Se il numero dei fattori primi dell'ordine di G è basso, G è risolubile, quindi, per il ricordato risultato di HALL, il nostro teorema è certo verificato. Possiamo pertanto dimostrarlo per induzione rispetto al numero dei fattori primi dell' ordine del gruppo, e quindi supporlo vero quando il numero di tali fattori primi è minore che per G, in particolare per i sottogruppi propri di G e per i gruppi fattoriali dei sottogruppi normali propri di G. Distinguiamo ora due casi:

I) S non è normale in G, onde N è un sottogruppo proprio di G. Per l'ipotesi di induzione, il teorema è allora valido per N, onde M ed R, essendo sottogruppi di HALL di N dello stesso ordine, sono ciascuno contenuto in un coniugato dell'altro, quindi coniugati tra loro. Pertanto un coniugato di M, cioè R, è contenuto in F e quindi in $\overline{H}$, cioè in un coniugato di H. onde M stesso è contenuto in un coniugato di H, come si voleva.

II) S è normale in G. Essendo un sottogruppo di SYLOW, S è l' unico sottogruppo di G del suo ordine, quindi è contenuto in M ed H. Nell' omomorfismo di G su $G^* = G/S$, ad M ed H corrispondono $M^* = M/S$ ed $H^* = H/S$, i cui ordini si ottengono da quelli di M ed H dividendoli per $p_{i_1}^{\alpha_{i_1}}$. Inoltre M^* ed H^* sono anch'essi sottogruppi di HALL di G^*, dispersibili, e l'ordine di M^* divide quello di H^*. Per l'ipotesi di induzione, si ha allora che M^* è contenuto in un sottogruppo di G^* coniugato ad H^*. In altri termini, esiste un elemento γ^* di G^* tale che $\gamma^{*-1} H^* \gamma^*$ contiene M^*. Se γ è un elemento di G cui corrisponde γ^* nell' omomorfismo di G su G^*, dovrà quindi aversi che $(S\gamma)^{-1} H (S\gamma)$ contiene M, ossia, essendo S in H, che $\gamma^{-1} H \gamma$ contiene M, onde il teorema resta pienamente provato.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. A. ČUNIHIN, *Sulle* Π-*proprietà dei gruppi*, « Mat. Sbornik N. S. », 25, (1949), pp. 321-346, (in russo), ed altri lavori precedenti dello stesso autore.

[2] PH. HALL, *A note on soluble groups*, « J. London math. Soc. », 3, (1928), pp. 98-105.

[3] O. ORE, *Contributions to the theory of groups of finite order*, « Duke math. J. », 5, (1939), pp. 431-460.

[4] H. WIELANDT, *Zum Satz von Sylow*, « Math. Zeits. », 60, (1954), pp. 407-408.

[5] G. ZAPPA, *Sui gruppi supersolubili*, « Rend. Sem. mat. Univ. Roma », (4), 2, (1948), pp. 323-330.