Bollettino
Unione Matematica Italiana

Luigi Muracchini

Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi sovrapposti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.4, p. 360–366.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_4_360_0>

Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi sovrapposti.

Nota di LUIGI MURACCHINI (a Bologna)

Sunto. - *Si studiano le trasformazioni puntuali fra piani sovrapposti dal punto di vista proiettivo-differenziale*

1. Recentemente il prof. VILLA ha fatto osservare come, allo stato attuale delle ricerche sulle trasformazioni puntuali fra spazi lineari, sia opportuno trattare il caso in cui gli spazi sono sovrapposti, il quale presenta interesse sia nei riguardi dell'intorno di una coppia di punti corrispondenti che riguardo alla trasformazione in un'intera regione del piano ([1]).

Nella presente Nota introduco dapprima alcuni enti associati ad una trasformazione fra piani sovrapposti che non hanno l'analogo per le trasformazioni fra piani distinti ([2]). Studio poi l'intorno di una coppia di punti corrispondenti, che sia regolare; infine, con l'uso del metodo del riferimento mobile di E. CARTAN ([3]), mostro quali siano gli invarianti proiettivi fondamentali di una trasformazione e aggiungo alcune osservazioni su particolari tipi di trasformazioni.

2. Fra due piani proiettivi π, $\bar{\pi}$ sovrapposti sia data una trasformazione puntuale T, che possiamo supporre rappresentata anali-

([1]) Per una bibliografia relativa a trasformazioni puntuali fra spazi lineari, si vedano: M. VILLA, *Transformations ponctuelles et transformations cremoniennes*, Deuxième colloque de Géom. Alg., Ed. G. Thone, Liège, 41-68, (1952); M. VILLA, *Recherche de type particuliers de transformations crémoniennes*, Colloque de géométrie differentielle, Strasbourg, 1953. Per le trasformazioni puntuali fra piani sovrapposti ricordo i due lavori di carattere locale: C. LONGO, *Trasformazioni puntuali nell'intorno di un punto unito*, « Rend. Acc. Lincei », 8, (8), (1950), 320-325; M. VILLA, *Una cubica collegata ad un punto unito di una trasformazione puntuale*, « Atti Acc. Ligure », 9, 165-175, (1952).

([2]) È ovvio che tutti gli enti che si possono introdurre per una trasformazione fra piani distinti continuano ad esistere nel caso di piani sovrapposti.

([3]) Si veda, ad esempio, per i principi del metodo di CARTAN applicato alle trasformazioni fra spazi proiettivi: E. ČECH, *Géométrie projective differentielle des correspondances entre deux éspaces*, « Cas. pro Pest. Mat. a Fys. », 73, (1949), 32-48.

ticamente dalle formule

$$\bar{x} = f(x, y), \qquad \bar{y} = \varphi(x, y) \tag{1}$$

dove x, y; $\bar{x}, \bar{y}$ sono rispettivamente le coordinate proiettive non omogenee di due punti A, $\bar{A}$ corrispondenti in T (il riferimento proiettivo essendo naturalmente lo stesso, generico, per i due piani π, $\bar{\pi}$).

Chiameremo *retta principale* uscente dal punto A la retta congiungente A col suo corrispondente $\bar{A}$. Le coordinate non omogenee u, v della retta principale relativa ad A sono ovviamente

$$u = \frac{y - \varphi}{x\varphi - yf}, \qquad v = \frac{f - x}{x\varphi - yf}. \tag{2}$$

Le (2) rappresentano analiticamente una corrispondenza dualistica D di tipo nullo ([4]) intrinsecamente legata alla T. Chiameremo *proiettività principale*, relativa al punto A, la proiettività fra la punteggiata $A\bar{A}$ ed il fascio di centro A, subordinata dalla corrispondenza D (nell'intorno del 1° ordine). La proiettività principale è data dalle relazioni:

$$\begin{aligned} X_0 - x &= \frac{(f-x)\{(\varphi - y) - m(f-x)\}}{\{(f-x)\varphi^x - (\varphi - y)(f^x - 1)\} + \{(f-x)(\varphi^y - 1) - (\varphi - y)f^y\}m} \\ Y_0 - y &= \frac{(\varphi - y)\{(\varphi - y) - m(f-x)\}}{\{(f-x)\varphi^x - (\varphi - y)(f^x - 1)\} + \{(f-x)(\varphi^y - 1) - (\varphi - y)f^y\}m} \end{aligned} \tag{3}$$

dove alla retta $Y - y = m(X - x)$ per A corrisponde il punto (X_0, Y_0) di $A\bar{A}$ e $f^x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, ecc..

Si osserverà che mentre ad una trasformazione T è associata una ben determinata corrispondenza D, viceversa ad una corrispondenza D sono associate in quel modo trasformazioni T dipendenti da una funzione arbitraria di due argomenti (si veda il successivo n. 5).

Le ∞^1 curve cui sono tangenti le rette principali nei punti A verranno indicate come *curve principali*, esse sono determinate dalla equazione differenziale

$$(f - x)dy - (\varphi - y)dx = 0. \tag{4}$$

[4]) Cfr. A. TERRACINI, *Trasformazioni dualistiche di tipo nullo nel piano e sistemi (G) proiettivamente deformabili*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », 8, (10), 89-94, (1951).

La proiettività principale (3) relativa ad un punto A risulta degenere se le coordinate di A soddisfano alla relazione:

$$(5)\qquad (x-f)^2\varphi^x - (y-\varphi)^2 f^y + (x-f)(y-\varphi)(\varphi^y - f^x) = 0.$$

Questa relazione, quando non sia identicamente soddisfatta, rappresenta analiticamente una curva che diremo la *curva* L della trasformazione T. Tale curva può essere definita anche in altri modi, come è facile verificare: essa è la curva luogo dei flessi delle curve principali ed è pure la curva jacobiana (nel piano punteggiato) della corrispondenza D. Infine la curva L e luogo dei punti A del piano per cui si verifica quest'altra circostanza: fra le rette uscenti da A e quelle uscenti da $\bar{A}$ la T subordina notoriamente una proiettività ω di equazione:

$$(6)\qquad f^y m\bar{m} + f^x\bar{m} - \varphi^y m - \varphi^x = 0 \quad (^5)$$

ebbene la curva L è il luogo dei punti A per cui quella proiettività è una prospettività.

È facile verificare inoltre che in un punto A che sia un flesso di prima specie della curva principale passante per esso (e quindi appartenga alla curva L), la tangente inflessionale e la tangente alla curva L non coincidono; la coincidenza si ha se, e solo se, A è un flesso di specie superiore. In tale caso la retta principale è anche retta caratteristica [6], ma non viceversa.

Dalle precedenti considerazioni segue subito che la curva L è indeterminata se, e solo se, le curve principali sono rette (che risultano rette unite nella trasformazione T). Le equazioni di una trasformazione T per cui ciò si verifica si scrivono subito; esse sono:

$$(7)\qquad \bar{x} = x, \qquad \bar{y} = f(x, y)$$

se le rette (curve) principali appartengono ad un fascio.

In caso contrario le equazioni di T si ottengono eliminando il parametro λ fra le equazioni:

$$(8)\qquad y = \lambda x + f(\lambda), \qquad \bar{y} = \lambda\bar{x} + f(\lambda), \qquad \bar{x} = F(x, \lambda).$$

Escluderemo d'ora in poi che la trasformazione T che consideriamo sia di uno dei due tipi (7), (8).

[5] Dove m, $\bar{m}$ sono i parametri (coefficienti direttivi) che fissano rette corrispondenti per A, $\bar{A}$.

[6] Retta caratteristica in A è, com'è ben noto, una retta per cui l'E_2 inflessionale di centro A ad essa appartenente, viene mutata da T ancora in un E_2 inflessionale.

Osserviamo infine che un punto unito nella trasformazione T risulta doppio almeno per la curva L ed anche punto singolare per l'equazione differenziale (4) [7].

3. Consideriamo una trasformazione T fra due piani sovrapposti e sia A, $\bar{A}$ una coppia regolare [8] di punti corrispondenti. Si può sempre supporre di aver scelto il riferimento in modo che le coordinate non omogenee di A siano (0, 0). Siano poi (a_0, b_0) quelle di $\bar{A}$; gli sviluppi in serie di potenze delle equazioni (1) siano

$$\bar{x} = a_0 + \sum_{i+j\geq 1} a_{ij}x^i y^j \qquad (9)$$
$$\bar{y} = b_0 + \sum_{i+j\geq 1} b_{ij}x^i y^j.$$

Supponiamo che la proiettività ω [(6) del n. 2] subordinata da T fra i fasci di centri A, $\bar{A}$ non sia una prospettività e consideriamo la conica γ (non degenere per le ipotesi fatte) luogo di intersezioni di raggi per A, $\bar{A}$ corrispondenti in ω, di equazione:

$$(y - b_0)(a_{10}x + a_{01}y) - (x - a_0)(b_{10}x + b_{01}y) = 0. \qquad (10)$$

La retta per A che corrisponde al punto $\bar{A}$ nella proiettività principale relativa ad A non è altro che la tangente a γ in A

$$(a_0b_{01} - b_0a_{01})y - (b_0a_{10} - a_0b_{10})x = 0. \qquad (11)$$

Possiamo scegliere un riferimento in cui la retta $A\bar{A}$ sia la $y = 0$ ed il polo di questa retta rispetto a γ sia il punto improprio di $x = 0$. Allora si avrà $b_0 = a_{10} = b_{01} = 0$.

Consideriamo le ∞^2 omografie $\Omega(\lambda, \mu)$ tangenti a T nella coppia A, $\bar{A}$, esse sono date dalle

$$\bar{x} - a_0 = \frac{a_{01}y}{1 + \lambda x + \mu y}, \qquad \bar{y} = \frac{b_{10}x}{1 + \lambda x + \mu y}. \qquad (12)$$

I punti uniti della omografia $\Omega(\lambda, \mu)$ sono i punti di γ che vengono proiettati da A secondo le tre rette:

$$a_{01}y^3 - (a_{01} + \mu a_0)b_{10}y^2x - (1 + \lambda a_0)b_{10}yx^2 + b_{10}^2x^3 = 0. \qquad (13)$$

[7] Ci si potrebbe giovare di quella osservazione per classificare i punti uniti di una trasformazione. Per un'altra classificazione, in parte analoga, si veda: S. LATTÈS, *Sur les èquations fonctionnelles*, Thèse, Paris, 1906.

[8] Cioè tale che le coordinate di A non annullino lo Jacobiano $f^x\varphi^y - f^y\varphi^x$ della T.

Si vede dunque che le terne di punti uniti delle omografie tangenti costituiscono su γ una involuzione I_3^2. Appartengono a tale involuzione tre terne costituite da punti coincidenti e la terna formata da quei tre punti contati una volta sola ciascuno fa pure parte di I_3^2, essa è relativa all'unica omografia tangente che sia ciclica d'ordine 3.

Scegliendo ora il punto $\bar{A}$ come punto improprio dell'asse $y=0$, ed il punto unità sulla conica γ in uno dei tre punti di cui s'è detto sopra si sarà fissato intrinsecamente il riferimento e gli sviluppi canonici per le equazioni di T diventano

$$
(14) \qquad
\begin{aligned}
\frac{\bar{y}}{\bar{x}} &= x + \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2 + [3] \\
\frac{1}{\bar{x}} &= y + \beta_{20}x^2 + \beta_{11}xy + \beta_{02}y^2 + [3].
\end{aligned}
$$

Risulta in tal modo che non ci sono invarianti nell'intorno del 1° ordine, mentre ve ne sono 6 nell'intorno del 2° ordine (che vedremo essere fondamentali). L'interpretazione geometrica dei 6 invarianti α_{ij}, β_{ij} non presenta difficoltà; essa potrebbe farsi (almeno in generale) considerando le tre omografie tangenti caratteristiche (9) ciascuna delle quali possiede due invarianti proiettivi legati alle α_{ij}, β_{ij} in modo semplice.

4. Consideriamo ora il caso in cui la proiettività ω, (6) del n. 2 è prospettiva. Scegliendo ancora il riferimento in modo che sia $A(0, 0)$, $A\bar{A} \equiv y = 0$ si hanno per le equazioni di T gli sviluppi

$$
(15) \qquad
\begin{aligned}
\bar{x} &= a_0 + a_{10}x + a_{01}y + [2] \\
\bar{y} &= \qquad\qquad\quad b_{01}y + [2].
\end{aligned}
$$

Attualmente la conica γ si spezza nella $y=0$ e la retta r

$$
(16) \qquad (b_{01} - a_{10})x - a_{01}y - a_0 b_{01} = 0
$$

sulla quale può essere preso il punto improprio dell'asse $x=0$ di un nuovo riferimento; dopo di che risulterà $a_{01}=0$. La curva L, passa ora per A ed ha ivi la tangente

$$
(17) \qquad 2a_0 b_{20}x + [a_0 b_{11} - (1 - b_{01})(b_{01} - a_{10})]y = 0.
$$

(9) Un'omografia caratteristica è un'omografia tangente che subordina, fra due coppie di rette caratteristiche corrispondenti le relative proiettività caratteristiche del VILLA. Si veda: M. VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi,* Accad. Ital. Rend., (7) 3, 710-724, (1942).

Se si esaminano anche nel caso attuale le omografie tangenti si constata che il luogo dei puntl uniti in quelle omografie è costituito dalla retta r e dalla $y = 0$. Le terne di punti uniti sono così distribuite: un punto sulla retta r e due sulla $y = 0$, su quest'ultima le coppie di punti uniti sono le coppie di una involuzione I_2^1 di cui fa parte la coppia $A\bar{A}$. Per ogni coppia dell'involuzione l'ulteriore punto unito descrive tutta la retta r. Vi è sempre e soltanto una *omologia tangente.*

Essa è tale che l'intersezione di r con $y = 0$ ed il centro sono una coppia di I_2^1, mentre l'asse è la retta h. Vi è dunque un invariante nell'intorno del 1° ordine nel caso attuale: la caratteristica dell'unica omologia tangente.

Per fissare intrinsecamente il riferimento occorre passare all'intorno del 2° ordine. Scegliendo il punto $\bar{A}$ come punto improprio di $y = 0$, si potranno poi scegliere, in generale, come punto improprio di $x = 0$ e punto unità le intersezioni di r con una retta caratteristica per A e con la retta (17). In tale caso gli sviluppi canonici diventano:

$$
(18) \qquad \begin{aligned}
\frac{\bar{y}}{\bar{x}} &= \alpha y + \alpha_{20}x^2 - \alpha_{20}xy + \alpha_{02}x^2 + [3] \\
\frac{1}{\bar{x}} &= \alpha x + \beta_{20}x^2 + \beta_{11}xy + [3].
\end{aligned}
$$

La scelta del riferimento ora fatta può diventare impossibile se la (17) coincide con l'asse $y = 0$ (ed in tale caso è retta caratteristica) oppure se tutte le rette caratteristiche coincidono con la $x = 0$ o sono indeterminate. Non ci soffermeremo ad esaminare in dettaglio questi casi per i quali si può sempre fissare il riferimento con uno dei tanti procedimenti che si adoperano anche per le trasformazioni fra piani distinti ([10]).

5. Per studiare questioni relative alle trasformazioni T, che non appartengano ai tipi (7), (8) del n. 2, ci si può servire del riferimento mobile di CARTAN, come nel caso di trasformazioni fra piani distinti ([11]). Se si sceglie per ogni punto A di π il riferimento fissato nel n. 3 è facile constatare che valgono le seguenti

([10]) Si potranno sfruttare al 2° ordine, le proiettività caratteristiche. Al 3° ordine, le *quartiche caratteristiche* introdotte dal VILLA. *Un fascio di quintiche collegato alle trasformazioni puntuali,* « Boll. U.M.I. », 3, (3), 8-15, (1948).

([11]) Cfr. la nota ([3]).

relazioni: posto $A_2 \equiv \bar{A}$ si avranno le formule di FRENET per lo spostamento infinitesimo del riferimento:

$$
(19) \qquad \begin{aligned}
dA &= \omega_{00}A + \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2 \\
dA_1 &= \omega_{10}A + \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 \\
dA_2 &= \omega_1 A + \omega_2 A_1 + \omega_{22}A_1
\end{aligned}
$$

avendosi $| AA_1A_2 | = 1$ e quindi:

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \omega_{22} = 0.$$

Le forme di PFAFF ω_{ij} sono date da:

$$
(20) \qquad \begin{aligned}
\omega_{00} &= \lambda_1\omega_1 + \lambda_2\omega_2, \qquad & \omega_{22} &= \mu_2\omega_1 + \mu_1\omega_2 \\
\omega_{10} &= 3\lambda_2\omega_1 + 3\lambda_3\omega_2, \qquad & \omega_{12} &= 3\mu_3\omega_1 + 3\mu_2\omega_2
\end{aligned}
$$

e si hanno per i sei invarianti fondamentali λ_i, μ_i le condizioni di integrabilità seguenti:

$$
(21) \qquad \begin{aligned}
&[d\lambda_1\omega_1] + [d\lambda_2\omega_2] + \{ 2\mu_2\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\mu_1 - 3\lambda_3 + 1 \} [\omega_1\omega_2] = 0 \\
&[d\lambda_2\omega_1] + [d\lambda_3\omega_2] + \{ 3\lambda_1\lambda_3 + 3\lambda_3\mu_2 - 2\lambda_2\mu_1 - 4\lambda_2^2 + \mu_2 \} [\omega_1\omega_2] = 0 \\
&[d\mu_2\omega_1] + [d\mu_1\omega_2] + \{ -2\lambda_2\mu_2 + \mu_2\mu_1 + \lambda_1\mu_1 + 3\mu_3 - 1 \} [\omega_1\omega_2] = 0 \\
&[d\mu_3\omega_1] + [d\mu_2\omega_2] + \{ -3\mu_1\mu_3 - 3\mu_3\lambda_2 + 2\mu_2\lambda_1 + 4\mu_2^2 - \lambda_2 \} [\omega_1\omega_2] = 0.
\end{aligned}
$$

Le ∞^2 omografie tangenti $K(\lambda, \mu)$ sono definite dalla:

$$K \cdot A = A_2, \qquad K \cdot A_1 = A + \lambda A_2, \qquad K \cdot A_2 = A_1 + \mu A_3$$

e le direzioni caratteristiche dall'equazione

$$(22) \quad (3\mu_3 - 1)\omega_1^3 + 3(2\mu_2 + \gamma_1)\omega_1^2\omega_2 + 3(2\lambda_2 + \mu_1)\omega_1\omega_2^2 + (3\lambda_3 - 1)\omega_2^3 = 0,$$

infine la direzione principale è ovviamente la $\omega_1 = 0$.

Le (21) mostrano che il sistema dei sei invarianti λ_i, μ_i è fondamentale e che *due trasformazioni, che abbiano, coppia per coppia, gli stessi intorni del secondo ordine sono omograficamente identiche.*

Si deduce inoltre dalle (21) che le trasformazioni T per cui le curve principali sono caratteristiche dipendono da una funzione arbitraria di due variabili. La cosa può anzi essere precisata facilmente, tenuto conto delle formule del n. 2: dato un sistema ∞^1 arbitrario di curve (non rette) esistono trasformazioni che ammettono quelle curve come principali dipendenti da una funzione arbitraria di due variabili, fra queste soltanto certe, dipendenti da due funzioni arbitrarie di una variabile, ammettono quelle curve come caratteristiche in generale semplici.