Bollettino Unione Matematica Italiana

Antonio de Castro

Sull'esistenza ed unicità delle soluzioni periodiche dell'equazione $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.4, p. 369–372.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_4_369_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

Sull'esistenza ed unicità delle soluzioni periodiche dell'equazione $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$.

Nota di ANTONIO DE CASTRO (a Madrid)

Sunto. - *Si perfezionano alcuni criteri di esistenza ed unicità di soluzioni periodiche per l'equazione differenziale* $\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0$.

1. Negli ultimi anni sono state studiate parecchie volte le questioni di esistenza ed unicità delle soluzioni periodiche dell'equazione.

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x})\dot{x} + g(x) = 0 \tag{1}$$

equivalente al sistema del primo ordine

$$\dot{x} = v \qquad \dot{v} = -f(x, v)v - g(x) \tag{2}$$

ed in particolare il caso di LIENARD, $\dot{x} + \omega f(x)\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ che ha importanti applicazioni nella Elettrotecnica ([1] della Bibliografia).

In questa Nota noi dimostriamo

a) un teorema per l'esistenza di soluzioni periodiche di (1) interessante per la semplicità e per la chiara interpretazione fisica delle sue ipotesi.

b) un teorema per l'unicità e stabilità di questa soluzione periodica che generalizza all'equazione (1) un risultato di G. SANSONE ([2]), perfezionato recentemente da J. L. MASSERA, ([3]), relativo all'equazione di LIENARD.

Supponiamo che nell'equazione (1) le funzioni $f(x, v)$ e $g(x)$ siano continue e lipschitziane nei loro argomenti in ogni dominio limitato ed inoltre che sia

i) $g(x)$ crescente, $xg(x) > 0$ per $x \neq 0$, ed essendo $G(x = \int_0^x g(\xi)d\xi$, sia $G(\pm\infty) = +\infty$,

ii) $f(0,\ 0) < 0$,

esista un numero $a (a > 0)$ tale che per $|x| > a$ si verifichino *iii*), *iv*):

iii) $f(x,\ v) > 0$.

iv) esistano un numero $N (N > 0)$ ed un numero $\alpha > 0$ tali che per qualunque funzione continua $v(\xi)$, $|v(\xi)| > N$ sia $\int_{-x}^{x} f(\xi,\ v)d\xi \geq$ $\geq \alpha > 0$ (¹).

v) $f(x,\ v)$ è non decrescente per $|x|$ e $|v|$ crescenti.

Le condizioni precedenti garantiscono l'esistenza, l'unicità e la stabilità di una soluzione periodica.

Le ipotesi *iii*) e *iv*) implicano l'esistenza di un intervallo $(-a\ \ a)$ di OX tale che fuori di quello la funzione $f(x,\ v)$ sia positiva e che sia anche positivo per v abbastanza grande il suo valore medio nell'intervallo complessivo. Siccome può scegliersi a arbitrariamente grande le condizioni sono assai deboli, e più generali e semplici, per esempio, di quelle date in [4].

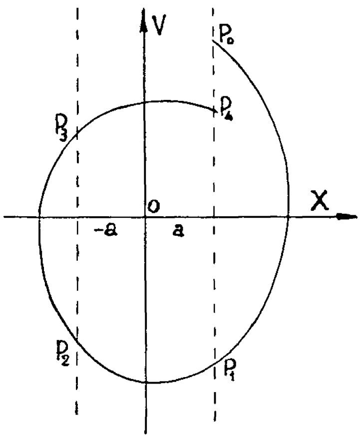
2. L'esistenza di almeno una soluzione periodica segue in modo simile a quello dato in [4], [5], cioè limitando una regione R nel piano XV senza punti singolari e dalla quale non esce nessuna curva integrale di (2); perciò si può applicare a R il teorema di BENDIXSON che garantisce l'esistenza di almeno una soluzione periodica.

(¹) Osserviamo che questa ultima sarà soddisfatta anche per ogni numero $N' > N$.

Se poniamo $u(x, v) = \frac{1}{2}v^2 + G(x)$ sarà per una soluzione $x = x(t)$ di (2)

(3) $$\dot{u}(x, v) = -f(x, v)v^2$$

espressione positiva in un intorno di (0,0); perciò le curve integrali di (2) tagliano le curve $u(x, v) = C$ (C, costante abbastanza piccola) verso l'esterno ed una di queste curve può scegliersi come contorno interno di R.



Il contorno esterno è una curva caratteristica di (2), cioe una curva integrale di

(4) $$dv/dx = -f(x, v) - g(x)/v.$$

È facile vedere che dalle condizioni imposte segue che queste curve caratteristiche hanno forma spirale e che si può scegliere il punto iniziale P_0 in modo che la curva corrispondente abbia per $-a \leq x \leq a$ la sua ordinata maggiore in valore assoluto di N. Sia $P_0P_1P_2P_3P_4$ questa curva, $P_i = P_i(x_i, v_i)$, $x_0 = x_1 = -x_2 = -x_3 = x_4 = a$, $|v_i| > N$, e dimostreremo che è $v_4 < v_0$. Da (3) e *iii*) segue, essendo su P_0P_1 e P_3P_4 $|x| > a$, che

(5) $$|v_1| < v_0 \qquad v_3 < |v_2|.$$

Su P_1P_2 si ottiene da (4) e *iv*) che è

(6) $$|v_2| - |v_1| = -\int_{-a}^{a} f(x, v)dx - \int_{-a}^{a} \frac{g(x)}{v}dx \leq -\alpha + \int_{0}^{a} \frac{g(x)}{|v|}dx < -\alpha + \frac{G(a)}{N}$$

e in modo simile su P_3P_4

$$(7) \qquad v_4 - v_3 = -\int_{-a}^{a} f(x,\, v)dx - \int_{-a}^{a} \frac{g(x)}{v}\, dx < -\alpha + \frac{G(-a)}{N}$$

Queste espressioni (6) e (7) sono negative se si sceglie $N > \frac{1}{\alpha} \max [G(a),\ G(-a)]$ ed allora da (5), (6) e (7) segue che è $v_4 < v_0$, C.V.D.

3. Per dimostrare adesso l'unicità della soluzione periodica trovata consideriamo gli archi di curva che partono dall'origine, di equazione $v = cg(x)$, (c è un parametro, costante su ogni curva). Su queste curve quando cresce $|x|$ cresce anche $|v|$, $g(x)/v$ rimane costante e $f(x,\, v)$ non decresce. Vale a dire, quando si percorrono quelle curve il campo delle direzioni definito da (4) gira nel senso orario.

Supponiamo per un momento $f(x,\, v)$ monotona in senso stretto e consideriamo una soluzione periodica di (1), cioè un ciclo chiuso Γ di (4). Sia Γ_k il ciclo ottenuto da Γ con una omotetia di centro 0 e rapporto k. Essendo su Γ le direzioni date da (4) tangenti a Γ segue che per qualunque $k < 1$ queste direzioni tagliano Γ_k verso l'esterno e che per $k < 1$ il taglio avviene verso l'interno. Segue che ogni curva integrale di (4) non può avere più di un punto comune con Γ_k cioè *non può esistere un altro ciclo chiuso di* (4).

Il teorema è anche valido nei punti dove è $dv/dx = 0$ o $dx/dv = 0$, ed anche se si prescinde dalla restrizione che $f(x,\, v)$ sia monotona in senso *stretto*, come segue facilmente per ragioni di continuità (vedi la Nota di MASSERA prima citata).

BIBLIOGRAFIA

[1] Una ricca Bibliografia di questi lavori si trova nella conferenza (pubblicata negli Atti del IV Congresso della U.M.I., Taormina, (1951): G. SANSONE, *Le equazioni delle oscillazioni non-lineari. Risultati analitici.*

[2] G. SANSONE, *Soluzioni periodiche dell'equazione di Liénard. Calcolo del periodo*, Rend. Sem. Mat. della Univ. e Politecnico di Torino, 10, (1950-51).

[3] J. L. MASSERA, *Sur un théorème de G. Sansone sur l'équation de Liénard*, Bollettino della U.M.I., III, 9, (1954).

[4] A. V. DRAGILEV, *Soluzioni periodiche dell'equazione differenziale delle oscillazioni non lineari*, Prikl. Mat. Meh., XVI, (1952).

[5] A. DE CASTRO, *Soluzioni periodiche di una equazione differenziale del secondo ordine*, Boll. della U.M.I., III, 8, (1953).