Bollettino Unione Matematica Italiana

Guido Vaona

Proprietà proiettivo-differenziali di sistemi di curve, superficie o varietà.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.4, p. 373–380.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_4_373_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

Proprietà proiettivo-differenziali di sistemi di curve, superficie o varietà.

Nota di GUIDO VAONA (a Bologna)

Sunto. - *Si introducono alcuni enti geometrici intrinsecamente associati a sistemi di curve, superficie o varietà.*

1. Introduzione.

Nelle ricerche sulle trasformazioni puntuali si presentano sovente particolari sistemi di curve, superficie o varietà (ad es. curve, superficie o varietà caratteristiche). Accade spesso che le particolarità non risiedano tanto nelle singole curve, superficie o varietà, ma proprio nel sistema (1).

Ora mentre sono state ampiamente studiate le proprietà proiettivo-differenziali di quei singoli enti, poco si conosce delle proprietà dei sistemi. Per questo motivo riesce talvolta assai difficile la caratterizzazione geometrica dei particolari sistemi che si presentano nella teoria delle trasformazioni puntuali.

In alcune mie ricerche in corso si sono palesate opportune certe nozioni che estendono in vari modi una nozione introdotta dal BOMPIANI alcuni anni or sono per i tessuti di curve piane: la nozione di *proiettività tangenziale* (2).

Lo scopo della presente Nota è appunto quello di introdurre alcuni enti geometrici relativi a sistemi di curve, superficie o varietà. Tali concetti troveranno applicazione in altro lavoro.

2. Proiettività tangenziale di uno strato di superficie di S_3.

Consideriamo uno *strato* di superficie, cioè un sistema ∞^1 di superficie tale che per un punto generico dello spazio passi una superficie del sistema ed una sola. Uno strato di superficie si può rappresentare con le equazioni parametriche

$$x_i = x_i(u_1, u_2, u_3) \qquad (i = 1, 2, 3, 4)\,. \tag{1}$$

(1) Così ad esempio il tritessuto delle curve caratteristiche di una trasformazione puntuale fra due piani è particolare pur essendo però generiche le singole curve del tritessuto. Si veda ad es.: M. VILLA, *Per una geometria proiettiva differenziale in grande delle trasformazioni puntuali*, « Atti IV Congresso Un. Mat. Ital., Taormina 1951 », Casa Ed. Perrella, Roma, pp. 263-273 (1952).

(2) Si veda: E. BOMPIANI, *Tessuti di curve piane e corrispondenze fra piani*, « Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. », (8), VI, pp. 7-12 (1949).

essendo le $u_3 = \text{cost.}$ le superficie dello strato, ed il determinante

$$| x \; x^1 \; x^2 \; x^3 |$$

essendo $\neq 0$ ([3]). Poichè i punti x, x^1, x^2, x^3 sono linearmente indipendenti, i punti x^{ij} $(i,j = 1, 2, 3)$ sono combinazioni lineari di tali punti, onde le funzioni (1) sono integrali di un sistema completamente integrabile di equazioni differenziali del tipo

$$x^{ij} = a_{ij}^{(0)} x + a_{ij}^{(1)} x^1 + a_{ij}^{(2)} x^2 + a_{ij}^{(3)} x^3 \; . \tag{2}$$

Viceversa un sistema del tipo (2) completamente integrabile definisce, a meno di omografie, uno strato di superficie ed uno solo.

Sia $P(u_1, u_2, u_3)$ un generico punto dello spazio e sia $P + \delta P$ il punto relativo ai valori $u_i + \delta u_i$ dei parametri. Consideriamo il piano π tangente in P alla superficie dello strato passante per P e sia $\overline{\pi}$ il piano tangente in $P + \delta P$ alla superficie passante per $P + \delta P$. Al tendere di $P + \delta P$ a P lungo una curva tangente ad una retta $\overline{p}$, la retta intersezione di π e $\overline{\pi}$ tende ad una posizione limite p che dipende esclusivamente da $\overline{p}$.

Associando ad ogni retta $\overline{\mathrm{p}}$ *della stella di centro* P *la retta* p *del piano tangente* π *sopradefinita, si ottiene, fra le rette della stella e quelle del piano, una proiettività che diremo proiettività tangenziale dello strato.*

Per la dimostrazione assumiamo un riferimento proiettivo locale avente per tetraedro fondamentale quello di vertici x, x^1, x^2, x^3 e per punto unità il punto $x + x^1 + x^2 + x^3$, sicchè il punto $X = t_0 x + t_1 x^1 + t_2 x^2 + t_3 x^3$ avrà coordinate (t_0, t_1, t_2, t_3).

Il piano tangente in P ha l'equazione $t_3 = 0$. La retta p di tale piano corrispondente alla direzione $\overline{p}$, definita dagli incrementi δu_1, δu_2, δu_3, ha le equazioni

$$t_3 = 0, \quad t_0 \delta u_3 + t_1 (a_{11}^{(3)} \delta u_1 + a_{12}^{(3)} \delta u_2 + a_{13}^{(3)} \delta u_3) + t_2 (a_{12}^{(3)} \delta u_1 + a_{22}^{(3)} \delta u_2 + a_{23}^{(3)} \delta u_3) = 0 \, .$$

Indicando con v_0, v_1, v_2 le coordinate plückeriane di p sul piano $t_3 = 0$, la corrispondenza fra le rette p, $\overline{p}$ ha le equazioni

$$\begin{aligned} v_0 &= \delta u_3 \\ v_1 &= a_{11}^{(3)} \delta u_1 + a_{12}^{(3)} \delta u_2 + a_{13}^{(3)} \delta u_3 \\ v_2 &= a_{12}^{(3)} \delta u_1 + a_{22}^{(3)} \delta u_2 + a_{23}^{(3)} \delta u_3 \, . \end{aligned} \tag{3}$$

([3]) Coi simboli x^i, x^{ij}, ... denotiamo le derivate parziali $\frac{\partial x}{\partial u_i}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}$, ..., ed indichiamo in forma compatta con x le coordinate di un punto, omettendo l'indice in basso.

La corrispondenza è dunque proiettiva.

Sussistono le due proprietà:

I. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè le superficie di uno strato siano piani è che la proiettività tangenziale dello strato nel punto generico sia degenere di specie 2.*

II. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè le superficie di uno strato siano rigate sviluppabili è che la proiettività tangenziale dello strato nel punto generico sia degenere di specie 1.*

Infatti le asintotiche delle superficie dello strato sono rappresentate dall'equazione

$$a_{11}^{(3)} du_1 du_1 + 2a_{12}^{(3)} du_1 du_2 + a_{22}^{(3)} du_2 du_2 = 0 .$$

Se la (3) è degenere di specie 2 si ha $a_{11}^{(3)} = a_{12}^{(3)} = a_{22}^{(3)} = 0$ e quindi le asintotiche sono indeterminate e le superficie sono piani, e viceversa. Se poi la (3) è degenere di specie 1 si ha $a_{11}^{(3)} a_{22}^{(3)} - a_{12}^{(3)} a_{12}^{(3)} = 0$ e quindi le asintotiche sono coincidenti e le superficie sono sviluppabili, e viceversa.

D'ora in poi supporremo che le superficie dello strato non siano piani né rigate sviluppabili onde la proiettività (3) è certo non degenere. Assumendo i parametri u_1, u_2 in modo che le $u_1 = \text{cost.}$ e $u_2 = \text{cost.}$ siano, su ciascuna superficie, le curve asintotiche, si avrà

$$a_{11}^{(3)} = a_{22}^{(3)} = 0 , \qquad a_{12}^{(3)} = a \neq 0 ,$$

e le (3) diventano

$$\begin{aligned} v_0 &= \delta u_3 \\ v_1 &= a\delta u_2 + a_{13}^{(3)} \delta u_3 \\ v_2 &= a\delta u_1 + a_{23}^{(3)} \delta u_3 . \end{aligned} \tag{4}$$

Segue dalle (4):

La proiettività tangenziale di uno strato di superficie, che non siano né rigate sviluppabili, né piani, subordina fra il fascio delle rette tangenti alla superficie dello strato l'involuzione delle tangenti coniugate.

3. Omologia prodotto della proiettività tangenziale e della polarità di Darboux.

È noto che le polarità rispetto alle quadriche di DARBOUX relative ad un punto P di una superficie subordinano fra le rette per P e le rette del piano tangente in P una stessa proiettività, la *polarità di* DARBOUX [4].

[4] Si veda ad es.: G. FUBINI ed E. ČECH, *Introduction à la Géométrie projective différentielle des surfaces,* Gauthier-Villars, Paris (1931), p. 53.

La superficie dello strato passante per un punto P, nel riferimento locale indicato al n. precedente, è rappresentata dallo sviluppo in serie

$$t_3 = at_1 t_2 - \frac{a}{3}\left(a_{11}^{(2)} t_1^3 + 3a_{12}^{(2)} t_1^2 t_2 + 3a_{12}^{(1)} t_1 t_2^2 + a_{22}^{(1)} t_2^3\right) + [4] ,$$

t_1, t_2, t_3 essendo coordinate non omogenee ed indicando con [4] i termini di grado ≥ 4 dello sviluppo. Le quadriche di DARBOUX hanno l'equazione

$$t_3 = at_1 t_2 + t_3 \left(- a_{12}^{(2)} t_1 - a_{12}^{(1)} t_2 + \lambda t_3\right) ,$$

λ parametro. La polarità di DARBOUX ha le equazioni

$$\begin{aligned} v_0 &= \delta u_3 \\ v_1 &= -a\delta u_2 + a_{12}^{(2)} \delta u_3 \\ v_2 &= -a\delta u_1 + a_{12}^{(1)} \delta u_3 . \end{aligned} \tag{5}$$

Le omografie prodotte dalle proiettività (4) e (5) nella stella e sul piano hanno rispettivamente le equazioni

$$\begin{aligned} \bar{\delta u}_1 &= - a\delta u_1 + \left(a_{12}^{(1)} - a_{23}^{(3)}\right) \delta u_3 \\ \bar{\delta u}_2 &= -a\delta u_2 + \left(a_{12}^{(2)} - a_{13}^{(3)}\right) \delta u_3 \\ \bar{\delta u}_3 &= a\delta u_3 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_0 &= v_0 \\ \bar{v}_1 &= -v_1 + \left(a_{12}^{(2)} + a_{13}^{(3)}\right) v_0 \\ \bar{v}_2 &= -v_2 + \left(a_{12}^{(1)} + a_{23}^{(3)}\right) v_0 . \end{aligned} \tag{7}$$

Si ha:

Le omografie prodotto della proiettività tangenziale e della polarità di DARBOUX, *relative ad un punto* P, *sono omologie armoniche nella stella di centro* P *e sul piano* π *tangente in* P, *aventi rispettivamente* π *per piano d'omologia e* P *per centro e per assi le rette*

$$\delta u_1 : \delta u_2 : \delta u_3 = \left(a_{12}^{(1)} - a_{23}^{(3)}\right) : \left(a_{12}^{(2)} - a_{13}^{(3)}\right) : 2a \tag{8}$$

$$v_0 : v_1 : v_2 = 2 : \left(a_{12}^{(2)} + a_{13}^{(3)}\right) : \left(a_{12}^{(1)} + a_{23}^{(3)}\right) . \tag{9}$$

La considerazione delle omologie armoniche prodotto della proiettività tangenziale e della polarità di DARBOUX ci fornisce quindi, per ogni punto P, una retta invariante, non appartenente al piano tangente alla superficie per P, che dipende dall'intorno del 3° ordine di P (5). È noto d'altra parte che, considerando l'intorno del 3° ordine di un punto su una singola superficie, non si ottiene nessuna retta invariante non appartenente al piano tangente (6).

(5) La retta di coordinate (9) è la corrispondente della retta di coordinate (8) nelle proiettività (4) e (5).

(6) Si veda ad es.: op. cit. in (4), p. 72.

4. Proiettività osculatrice di una congruenza di curve di S_3.

Consideriamo una congruenza di curve di S_3 tale che per ogni punto generico dello spazio passi una curva della congruenza ed una sola. Essa si può rappresentare con le equazioni parametriche (1), dove si riguardino come curve della congruenza le curve $u_2 =$ $=$ cost., $u_3 =$ cost.. Essendo il determinante $| x\, x^1\, x^2\, x^3 | \neq 0$, la congruenza può pensarsi anche rappresentata dal sistema di equazioni differenziali (2).

Supponiamo che le curve della congruenza non siano rette. Sia $P(u_1, u_2, u_3)$ un punto generico dello spazio e sia $P + \delta P$ il punto relativo ai valori $u_i + \delta u_i$ dei parametri. Consideriamo i piani osculatori π e $\bar{\pi}$ in P e $P + \delta P$ alle curve della congruenza passanti per tali punti. Al tendere di $P + \delta P$ a P lungo una curva tangente alla retta $\bar{p}$, la retta intersezione di π con $\bar{\pi}$ tende in generale ad una posizione limite p, che dipende esclusivamente da $\bar{p}$.

Associando ad ogni retta $\bar{\mathrm{p}}$ *della stella di centro* P *la retta* p *del piano osculatore* π *sopradefinita, si ottiene, fra le rette della stella e quelle del piano, una proiettività che diremo proiettività osculatrice della congruenza.*

Infatti, nel riferimento indicato al n. 2, il piano π ha l'equazione

$$a_{11}^{(2)}\, t_3 = a_{11}^{(3)}\, t_2\,, \tag{10}$$

dove, per le ipotesi fatte, si può supporre, ad es., $a_{11}^{(2)} = a \neq 0$. La retta p di tale piano, corrispondente alla direzione $\bar{p}$ $(\delta u_1, \delta u_2, \delta u_3)$, ha le equazioni

$$\begin{aligned} at_3 = a_{11}^{(3)}\, t_2,\ a(a\delta u_3 - a_{11}^{(3)}\delta u_2)t_0 + a(b\delta u_2 + c\delta u_3)t_1 + (l\delta u_1 + \\ + m\delta u_2 + n\delta u_3)t_2 = 0\,, \end{aligned} \tag{11}$$

dove

$$b = aa_{12}^{(3)} - a_{11}^{(3)}\, a_{12}^{(2)} \quad , \quad c = aa_{13}^{(3)} - a_{11}^{(3)}\, a_{13}^{(2)}$$

$$l = a\left(b + \frac{\partial a_{11}^{(3)}}{\partial u_1}\right) + a_{11}^{(3)}\left(c - \frac{\partial a}{\partial u_1}\right)$$

$$m = a\left(a\, a_{22}^{(3)} + a_{11}^{(3)}\, a_{23}^{(3)} + \frac{\partial a_{11}^{(3)}}{\partial u_2}\right) - a_{11}^{(3)}\left(aa_{22}^{(2)} + a_{11}^{(3)}\, a_{23}^{(2)} + \frac{\partial a}{\partial u_2}\right)$$

$$n = a\left(aa_{23}^{(3)} + a_{11}^{(3)}\, a_{33}^{(3)} + \frac{\partial a_{11}^{(3)}}{\partial u_2}\right) - a_{11}^{(3)}\left(aa_{23}^{(2)} + a_{11}^{(3)}\, a_{33}^{(2)} + \frac{\partial a}{\partial u_3}\right)\,.$$

Assumendo in π v_0, v_1, v_2 come coordinate della retta di equazioni $at_3 = a_{11}^{(3)} t_2$, $v_0 t_0 + v_1 t_1 + v_2 t_2 = 0$, la corrispondenza fra le rette p, $\bar{p}$ ha le equazioni

$$
(12) \qquad \begin{aligned} v_0 &= a(a\delta u_3 - a_{11}^{(3)} \delta u_2) \\ v_1 &= a(b\delta u_2 + c\delta u_3) \\ v_2 &= l\delta u_1 + m\delta u_2 + n\delta u_3 , \end{aligned}
$$

e quindi è una proiettività.

Sussiste la proprietà:

Condizione necessaria o sufficiente affinchè la proiettività osculatrice di una congruenza di curve sia, in un punto generico, degenere di specie 2 è che le curve della congruenza giacciano su ∞^1 piani.

Infatti se la proiettività (12) è degenere di specie 2 si avrà

$$
(13) \qquad l = 0 , \quad ab + a_{11}^{(3)} c = 0 , \quad am + a_{11}^{(3)} n = 0 .
$$

Dalle prime due della (13) segue

$$
a \frac{\partial a_{11}^{(3)}}{\partial u_1} = a_{11}^{(3)} \frac{\partial a}{\partial u_1} , \text{ donde } \frac{a_{11}^{(3)}}{a} = f(u_2, u_3) .
$$

Ma allora col cambiamento di parametri $\tau_1 = u_1$, $\tau_2 = u_2$, $\tau_3 = \varphi(u_2, u_3)$, essendo φ un integrale dell'equazione $a_{11}^{(3)} \frac{\partial \varphi}{\partial u_3} + a \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = 0$, si può rendere $a_{11}^{(3)} = 0$. Dalle (13) segue $a_{12}^{(3)} = a_{22}^{(3)} = 0$. Ciò significa che le ∞^1 superficie $u_3 = \text{cost.}$ sono piani. Se viceversa le curve giacciono in ∞^1 piani, assumendo questi come superficie $u_3 = \text{cost.}$, segue subito che la (12) è degenere di specie 2.

Si ha ancora:

Affinchè la proiettività osculatrice di una congruenza di curve, in un punto generico, sia degenere di specie 1 *è necessario e sufficiente che i piani osculatori alle curve della congruenza siano ∞^2 anzichè ∞^3.*

Indichiamo con η_i, ϑ_i, σ_i, τ_i le coordinate plückeriane dei piani individuati dalle terne di punti (x, x^1, x^2), (x, x^1, x^3), (x, x^2, x^3), (x^1, x^2, x^3) e quindi η_i, ϑ_i, σ_i, τ_i sono i minori del 3° ordine estratti dalle matrici

$$
\eta = | x \ x^1 \ x^2 | , \quad \vartheta = | x \ x^1 \ x^3 | , \quad \sigma = | x \ x^2 \ x^3 | , \quad \tau = | x^1 \ x^2 \ x^3 | .
$$

Il piano osculatore in $P(u_1, u_2, u_3)$ alla curva della congruenza ha coordinate ξ date da

$$
\xi = a\eta + a_{11}^{(3)} \vartheta .
$$

Eseguendo i calcoli si ottiene inoltre

$$|\xi\,\xi^1\,\xi^2\,\xi^3| = -1\,(ab + a_{11}^{(3)}\,c)\,|\eta\,\vartheta\,\sigma\,\tau|$$

e quindi, annullandosi il 2° membro quando e solo quando è nullo il modulo delle (12), segue l'asserto.

In particolare, se $l = 0$ la congruenza è formata da curve piane, e viceversa. Se $l \neq 0$ e $ab + a_{11}^{(3)}\,c = 0$, le curve sono sghembe ed i loro piani osculatori sono tangenti ad una superficie $\mathfrak{F}$ non sviluppabile. Viceversa fissate ∞^2 curve su una superficie $\mathfrak{F}$ non sviluppabile, gli ∞^2 spigoli di regresso degli inviluppi dei piani tangenti ad $\mathfrak{F}$ lungo le curve fissate costituiscono una congruenza del tipo precedente. Non può essere infine contemporaneamente $l = ab + a_{11}^{(3)}\,c = 0$ senza che la caratteristica del determinante delle (12) diventi 1.

Osserviamo infine che, data una congruenza di curve a proiettività osculatrice non degenere, si può considerare in ogni punto P, accanto alla proiettività osculatrice, il *sistema nullo osculatore* (7) in P alla curva della congruenza. Si possono così considerare i prodotti di queste corrispondenze, ottenendo enti geometrici invarianti dipendenti sia dalla curva per P come dal sistema.

5. Proiettività tangenziale di uno strato di ipersuperficie di S_r.

Consideriamo uno strato di ipersuperficie di S_r, rappresentato dalle equazioni parametriche

$$x = x(u_1,\ u_2, \dots,\ u_r)\,, \tag{14}$$

essendo le $u_r = \text{cost.}$ le ipersuperficie dello strato. Le funzioni (14) possono riguardarsi come integrali di un sistema di equazioni differenziali, completamente integrabile, del tipo

$$x^{ij} = a_{ij}^{(0)}\,x + a_{ij}^{(1)}\,x^1 + \dots + a_{ij}^{(r)}\,x^r,\ (i, j = 1,\ 2, \dots,\ r)\,. \tag{15}$$

Sia $P(u_1,\ u_2, \dots,\ u_r)$ un generico punto dello spazio e sia $P + \delta P$ il punto relativo ai valori $u_i + \delta u_i$ dei parametri. Consideriamo gli spazi tangenti in P e $P + \delta P$ alle ipersuperficie dello strato passanti per tali punti. Al tendere di $P + \delta P$ a P lungo una curva tangente ad una retta $\overline{p}$, l'S_{r-2} intersezione degli spazi tangenti dianzi considerati tende, in generale, ad una posizione limite che dipende esclusivamente da $\overline{p}$.

(7) Si veda ad es.: op. cit. in (4), p. 28.

Associando ad ogni retta $\overline{\mathrm{p}}$ *della stella di centro* P *l'* S_{r-2} *sopradefinito, si ottiene, fra le rette della stella e gli* S_{r-2} *dello spazio tangente in* P *alla ipersuperficie dello strato, una proiettività che diremo proiettività tangenziale dello strato.*

Introducendo il sistema di coordinate locali $(t_0, t_1, \dots, t_r)$ analogo a quello del n. 2, la proiettività tangenziale è rappresentata dalle equazioni

$$v_0 = \delta u,$$
$$v_h = \sum_{1}^{r}{}_{i}\, a_{hi}^{(r)} \delta u_i \qquad (h = 1, 2, \dots, r-1). \tag{16}$$

Si vede subito dalle (16) che, se la proiettività tangenziale è degenere, la dimensione della totalità degli spazi tangenti è minore dell'ordinario e viceversa. Più precisamente si ha:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la proiettività tangenziale (16) sia degenere di specie k *è che gli iperpiani tangenti alle ipersuperficie dello strato siano* ∞^{r-k}.

6. Proiettività osculatrice di un sistema ∞^{r-1} di curve e di un sistema ∞^{r-k} di V_k di S_r.

Sia dato un sistema ∞^{r-1} di curve di S, rappresentato dalle (14) o dalle (15), essendo le $u_2 =$ cost., $u_3 =$ cost., ..., $u_r =$ cost. le curve del sistema. Supponiamo che lo spazio di immersione della curva generica abbia dimensione $\geq (r-1)$.

Associando ad ogni retta $\overline{\mathrm{p}}$ *uscente da un punto generico* P *l'* S_{r-2} *intersezione degli* S(r — 1) — *osculatori alle curve del sistema in* P *e nel punto infinitamente vicino a* P *nella direzione di* $\overline{\mathrm{p}}$, *si ottiene una proiettività che diremo proiettività osculatrice del sistema considerato.*

Sia dato infine un sistema ∞^{r-k} di V_k, rappresentabile con le (14) o (15), essendo le $u_{k+1} =$ cost., ..., $u_r =$ cost. le V_k del sistema. Consideriamo un punto P generico e un S_{r-k+1} generico passante per P. L' S_{r-k+1} sega le V_k del sistema secondo ∞^{r-k} curve. Nell' S_{r-k+1} si può considerare la proiettività osculatrice del sistema di curve sezione, sicchè:

Un sistema ∞^{r-k} *di* V_k *di* S_r *determina in un generico* S_{r-k+1} *uscente da un punto* P *una proiettività fra le rette per* P *e gli* S_{r-k-1} *appartenenti allo spazio* S(r — k) — *osculatore in* P *alla curva sezione della* V_k *del sistema con l'* S_{r-k+1}.