Bollettino
Unione Matematica Italiana

Tristano Manacorda

Una osservazione sulla dinamica dei fili.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.4, p. 385–390.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_4_385_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

Una osservazione sulla dinamica dei fili.

Nota di TRISTANO MANACORDA (a Firenze)

Sunto. - *Si osserva che per un filo perfettamente flessibile ed elastico, la condizione che il moto dei suoi punti sia parallelo ad una direzione fissa basta da sola ad individuare il moto per quadrature, rimanendone determinate in corrispondenza le condizioni al contorno e iniziali e la distribuzione del carico, che vengono a dipendere da due funzioni arbitrarie del tempo.*

1. Nello studio della dinamica dei fili, nella impossibilità, per la maggior parte dei casi, di pervenire ad una trattazione rigorosa e generale della questione, si è soliti fare intervenire delle ipotesi semplificative che rendano più accessibile (anzi, possibilmente, addirittura lineare) il problema analitico. Cosí, se ci limitiamo al caso di fili perfettamente flessibili e che non presentano resistenza a torsione (1), si considerano di solito le piccole vibrazioni del

(1) Per una trattazione in cui si prescinde da quest'ultima ipotesi, cfr. C. CATTANEO, *Sulla statica dei fili perfettamente flessibili resistenti a torsione*, « Rend. Ist. Lombardo Sc. Lett. », *85* (1952), 27-46.

sistema attorno ad una configurazione di equilibrio, aggiungendo l'ipotesi, o della inestendibilità, o che valga la legge di HOOKE ([2]). Si considera poi, per lo più, il caso che la forza di massa si riduca al peso, a cui talvolta si aggiunge un carico, variabile col tempo e lungo il filo, ma anch'esso verticale. Con tutte queste ipotesi, in ogni modo, si arriva in prima approssimazione ad equazioni di moto lineari. Ma se si vuole spingere l'indagine fino alla considerazione di oscillazioni non lineari, si va subito incontro a grandi difficoltà analitiche. È notevolissimo in questo campo il problema trattato dal KRALL ([3]) e che ha dato origine a diverse ricerche di carattere analitico ([4]), e va ricordata l'indagine del CARRIER ([5]). Per semplificare in qualche modo la questione complicata dalla voluta rinunzia a considerare oscillazioni lineari, si accetta allora l'ipotesi che le condizioni al contorno e iniziali, insieme alla distribuzione del carico, siano tali da consentire al filo vibrazioni parallele ad una direzione fissa, diciamo, pensando al peso, verticali.

Ora, sembra che non sia mai stato osservato che la duplice ipotesi di perfetta elasticità e di vibrazioni puramente verticali, basta da sola a determinare completamente il moto per sole quadrature. Di modo che si pone poi il problema della determinazione delle condizioni al contorno e della distribuzione dei carichi compatibili col moto determinato. Nel seguito considereremo un filo perfettamente elastico pesante e soggetto a carichi verticali, oltre che ad una eventuale resistenza del mezzo, e i cui estremi siano vincolati a muoversi su due rette verticali. Determinato per sole quadrature il moto del filo nella ipotesi di vibrazioni puramente verticali, vedremo che le condizioni al contorno e la distribuzione del carico ne risultano determinate a meno di due funzioni arbitrarie del tempo. Daremo poi qualche esempio di casi in cui le vibrazioni perfettamente verticali, senza nessuna restrizione sulla loro ampiezza, effettivamente avvengono.

2. Prendiamo dunque in considerazione un filo pesante, perfettamente elastico, soggetto a muoversi nel piano verticale x, z

([2]) Cfr. ad es. K. WOLF, *Schwingungen elastischer Seile*, « ZAMM », 7 (1927), 137-144.

([3]) G. KRALL, *Dinamica e aereodinamica dei fili*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », (8), *3* (1947), 11-22; *5* (1948), 197-203; 285-288.

([4]) Ad es. J. CECCONI, *Su di una equazione differenziale non lineare di secondo ordine*, « Ann. Scuola Norm. Pisa », (3) *4* (1950), 245-278.

([5]) G. F. CARRIER, *On the non linear vibrations problem of the elastic string*, « Quart. Appl. Math. », 3 (1945), 157-175; 7 (1949), 98-101.

sotto l'azione del suo peso e di un carico verticale, variabile lungo il filo e col tempo in ogni punto del filo, oltre che ad una eventuale resistenza del mezzo. Allo stato naturale sia $2l$ la lunghezza del filo e indichi s l'ascissa curvilinea misurata lungo il filo a partire dal suo punto medio Q in verso scelto arbitrariamente, di modo che ogni punto P del filo è individuato in ogni istante da un valore di s con $-l \leq s \leq l$. Indichiamo poi con σ l'ascissa curvilinea misurata lungo il filo nello stato istantaneo di moto, a partire dal punto Q' corrispondente al punto Q nella configurazione istantanea, e positivamente in senso concorde a quello positivo di s. Anche σ risulta una funzione univoca di s e del tempo t. Scelto un sistema cartesiano di assi $0xz$, con l'asse z diretto verticalmente verso l'alto, si supponga infine che gli estremi A e B del filo siano vincolati a muoversi sulle rette verticali $x = -d$, $x = d$, $d > 0$. Se $T = T(s, t)$ indica la tensione del filo, l'ipotesi di perfetta elasticità si traduce nella relazione

$$T = C\frac{d\sigma - ds}{ds} \tag{2,1}$$

in cui $d\sigma$ è l'elemento d'arco corrispondente a ds nell'istante t, e C indica una costante positiva.

Dopo di che le equazioni indefinite di moto riferite alla variabile lagrangiana s si scrivono

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[T\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right] = \rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \rho\varepsilon R(v)\frac{\partial x}{\partial t}, \tag{2,2,1}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[T\frac{\partial z}{\partial \sigma}\right] = \rho\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \rho\varepsilon R(v)\frac{\partial z}{\partial t} + \rho g - p(s, t), \tag{2,2,2}$$

in cui ρ è la densità riferita allo stato naturale, ε è una costante positiva, R una funzione adimensionale positiva della velocità $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$, atta a rappresentare la resistenza del mezzo, ed infine $p(s,t)k$ è il carico verticale specifico riferito allo stato naturale, con k versore della verticale ascendente.

Alle (2,2) vanno aggiunte le condizioni al contorno ed iniziali che scriviamo nella forma

$$x(\pm l, t) = \pm d\,; \qquad z(-l, t) = \varphi(t)\,; \qquad z(l, t) = \psi(t)\,; \tag{2,3}$$

$$x(s, 0) = \alpha(s)\,; \qquad z(s, 0) = \gamma(s)\,; \tag{2,4}$$

$$\dot{x}(s, 0) = u(s)\,; \qquad \dot{z}(s, 0) = w(s), \tag{2,5}$$

con α, γ, φ, ψ, u, w funzioni assegnate dei loro argomenti.

Chiediamoci se è possibile, per una conveniente scelta di p, α, γ, φ, ψ, u, w un moto del filo puramente verticale, tale cioè che durante tutto il moto sia

$$x(s, t) = x(s) = \alpha(s). \tag{2,6}$$

Con ciò $u = 0$, e seguitando ad indicare la $x(s, 0)$ con $x(s)$, la condizione (2,6) sostituita nella (2,2,1) porta

$$T\frac{\partial x}{\partial \sigma} = C\,f(t), \tag{2,7}$$

con C costante positiva ed $f(t)$ funzione non mai negativa, a priori arbitraria. Ma tenendo conto della (2,1) (ed anche della necessaria corrispondenza biunivoca tra s e σ) si ottiene

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s} = \frac{x_s'}{x_s' - f(t)} \tag{2,8}$$

e con una quadratura

$$\sigma = \int_0^s \frac{x_s'}{x_s' - f(t)}\,ds. \tag{2,9}$$

Si osservi ora che x_s' è necessariamente non negativa. Difatti è $T x_s' = C\frac{\partial \sigma}{\partial s} f(t) \geq 0$, e per la (2,8) anche $x_s' - f(t) \geq 0$. Avendosi infine $x_\sigma' = x_s' - f(t)$, ed essendo x_σ' il primo coseno direttore della tangente al filo nella configurazione istantanea, è anche $x_s' - f(t) \leq 1$. Con ciò l'integrando nella (2,9) risulta essenzialmente positivo. D'altra parte, per l'ovvia identità $x_\sigma'^2 + z_\sigma'^2 = 1$, si ottiene

$$z_s'^2 = \frac{x_s'^2}{[x_s' - f(t)]^2}\,\{\, 1 - [x_s' - f(t)]^2 \,\},$$

dalla quale

$$z(s,\, t) = \int_{-l}^{s} g(s,\, t)ds - h(t), \tag{2,10}$$

con $g(s,\, t) = \pm\, \dfrac{x_s'}{x_s' - f(t)}\sqrt{1 - [x_s' - f(t)]^2}$ e $h(t)$ funzione arbitraria, e intendendo della radice di prendere il valore aritmetico.

Con ciò, $z(s, t)$ rimane determinata, a meno del segno, in funzione delle due funzioni arbitrarie del tempo $f(t)$ e $h(t)$, la prima non negativa, e della $x(s)$ a priori arbitraria salvo la condizione $x(\pm\, l) = \pm\, d$. Quanto alla scelta del segno nella (2,10), esso deve essere determinato in base alle condizioni iniziali, dopo di che la funzione g va prolungata con criterio di continuità.

Le (2,6) e (2,10) determinano così una soluzione delle (2,2) se è possibile scegliere le funzioni f ed h e le p, α, γ, w in modo da rendere soddisfatte la seconda equazione indefinita e le condizioni ai limiti.

Dalla (2,3,2) e dalla (2,10) si ha

$$-\,h(t) = \varphi(t) \qquad \int_{-l}^{l} g(s,\, t)ds - h(t) = \psi(t), \tag{2,11}$$

che determina le funzioni $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ in funzione di f e h. La (2,4,2) e la (2,5,2) danno a loro volta

$$(2,12)\qquad \int_{-l}^{s} g(s,\ 0)ds = \gamma(s) + h(0)\,; \qquad \int_{-l}^{s} \dot{g}(s,\ 0)ds = w(s) + \dot{h}(0),$$

e quindi le funzioni $\gamma(s)$ e $w(s)$ risultano univocamente determinate in funzione di $x(s)$. La seconda equazione indefinita determina infine $p(s,\ t)$ per ogni scelta delle tre funzioni $x(s)$, $f(t)$ e $h(t)$ con

$$(2,13)\qquad p(s,\ t) = \rho g + \rho\ddot{z} + \rho\varepsilon R(v)\dot{z} - \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{Cf(t)}{x_s'}\, z_s'\right].$$

Rimane pertanto assicurato che, per ogni scelta della funzione $x(s)$ è possibile determinare delle condizioni ai limiti e delle distribuzioni di carichi le quali assicurino un moto puramente verticale del sistema. Tale determinazione viene di regola a dipendere da due funzioni arbitrarie del tempo, $f(t)$ e $h(t)$.

3. Vogliamo qui dare qualche esempio di applicazione delle considerazioni svolte nel n. precedente.

a) Sia

$$(3,1)\qquad x_s' = k, \text{ con } k \text{ costante positiva, } k = d/l.$$

La (2,10) diviene ora

$$(3,2)\qquad z_s' = \beta(t), \qquad z(s,\ t) = \beta(t)[s + l] - h(t),$$

con $\beta(t) = \pm \dfrac{k}{k - f(t)} \sqrt{1 - [k - f(t)]^2}$, mentre le (2,11) danno

$$(3,3)\qquad \varphi(t) = -\,h(t)\,; \qquad \psi(t) = 2l\beta(t) - h(t),$$

e le (2,12)

$$(3,4)\qquad \gamma(s) = \beta(0)[s + l] - h(0)\,; \qquad w(s) = \dot{\beta}(0)[s + l] - \dot{h}(0).$$

Supponiamo ora che nella (3,2) valga per ogni s un sol segno, ad es. quello positivo. Allora durante tutto il moto la configurazione del filo è rettilinea con pendenza $\beta(t)/k$, e il moto agli estremi è univocamente determinato per ogni scelta delle funzioni $\beta(t)$ [e cioè di $f(t)$] e $h(t)$. Il carico che assicura la possibilità di questo moto è dato dalla (2,13) che ora, osservando che nel caso particolare T risulta funzione solo del tempo, diviene

$$(3,5)\quad p(s,t) = \rho g + \rho\{\ddot{\beta}(t)[s+l] - \ddot{h}(t)\} + \rho\varepsilon R(\dot{\beta}(t)[s+l] - \dot{h}(t))\{\dot{\beta}(t)[s+l] - \dot{h}(t)\}.$$

Se in particolare è $\varepsilon = 0$ (moto nel vuoto), p risulta funzione lineare di s, e se inoltre $\ddot{\beta} = \ddot{h} = 0$, $p = \rho g$ come è fisicamente ovvio. In tal caso il filo risulta esente da forze ripartite e il moto degli estremi è rettilineo uniforme. Ma solo se la velocità di A e B è eguale il moto degenera in una traslazione rigida.

b) Supponiamo ancora valida la (3,1), ma che la (3,2,1) valga ora nella forma

$$z_s' = \beta(t) \text{ per } -l \leq s \leq 0\,; \qquad z_s' = -\beta(t) \text{ per } 0 \leq s \leq l, \tag{3,6}$$

con $\beta(t) \geq 0$. Da queste si ottiene ora

$$z = \beta(t)s + h_1(t),\ -l \leq s \leq 0\,; \qquad z = -\beta(t)s + h_1(t),\ 0 \leq s \leq l. \tag{3,7}$$

La continuità della z per $s = 0$ è soddisfatta, mentre risulta discontinua, come è ovvio, la z_s'. Con ciò le condizioni al contorno danno

$$\varphi(t) = h_1(t) - \beta(t)l\,; \qquad \psi(t) = h_1(t) - \beta(t)l\,; \tag{3,8}$$

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \beta(0)s + h_1(0), & -l \leq s \leq 0,\\ \gamma(s) &= -\beta(0)s + h_1(0), & 0 \leq s \leq l\,; \end{aligned} \tag{3,9}$$

$$\begin{aligned} w(s) &= \dot\beta(0)s + \dot h_1(0), & -l \leq s \leq 0,\\ w(s) &= -\dot\beta(0)s + \dot h_1(0), & 0 \leq s \leq l. \end{aligned} \tag{3,10}$$

Anche qui la tensione risulta, come prima, funzione solo del tempo, e quanto al carico si ha

$$\begin{aligned} p(s, t) &= \rho g + \rho[\ddot\beta s + \ddot h_1] + \rho\varepsilon R(\dot\beta s + \dot h_1)[\dot\beta s + \dot h_1], & -l \leq s \leq 0\,;\\ p(s, t) &= \rho g + \rho[-\ddot\beta s + \ddot h_1] + \rho\varepsilon R(-\dot\beta s + \dot h_1)[-\dot\beta s + \dot h_1], & 0 \leq s \leq l\,; \end{aligned} \tag{3,11}$$

che risulta dunque continuo per $s = 0$,

In particolare risulta qui possibile un moto con $\varphi = \psi = 0$, cioè con gli estremi del filo fissi. La (3,8) porta allora $h_1(t) = \beta(t)l$, e l'integrale risulta

$$\begin{aligned} z &= \beta(t)(s + l), & -l \leq s \leq 0\,;\\ z &= \beta(t)(l - s), & 0 \leq s \leq l, \end{aligned} \tag{3,12}$$

la cui determinazione viene quindi a dipendere cosí, come il carico, solo da $\beta(t)$.

Consideriamo il caso ancor più particolare di $\varepsilon = 0$, e facciamo $p - \rho g = 0$, (filo esente da forze di massa e mobile nel vuoto). Dalla (3,11) risulta nel caso di estremi fissi, $\ddot\beta = 0$, quindi β funzione lineare di t.

Segue dunque che z risulta, per ogni s, funzione sempre crescente o decrescente del tempo, e quindi non sono possibili moti oscillatori puramente verticali di un filo, mobile nel vuoto e non soggetto a forze ripartite, con gli estremi fissi e la configurazione iniziale determinata dalle (3,12) con $t = 0$.

Risultano ovvie le generalizzazioni che possono ottenersi dai casi particolari qui esaminati.