Bollettino Unione Matematica Italiana

P. Sconzo

Formule di estrapolazione per l'integrazione numerica delle equazioni differenziali ordinarie.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.4, p. 391–399.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_4_391_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

Formule di estrapolazione per l'integrazione numerica delle equazioni differenziali ordinarie.

Nota di P. Sconzo (a Eva Peron, Argentina)

Sunto. - *L'autore deduce, a partire dalla conosciuta formula sommatoria di* Euler, *alcune espressioni utili per l'integrazione numerica delle equazioni differenziali ordinarie. Data per es. l'equazione* $y' = F(x, y)$, *con* $x = x_0$, $y = y_0$, *dette espressioni permettono di calcolare, per estrapolazione, i valori* y_r *della funzione incognita* $y(x)$, *per mezzo di somme pesate di 4 o 6 termini, contenenti i valori di* $f_i = wF(x_i, y(x_i))$; *dove* w *è il passo costante d'integrazione ed* i *prende valori decrescenti a partire da* $r - 1$. *Espressioni analoghe valgono per le equazioni di 2° ordine*.

§ **1.** Premettiamo alcune formole, che ci saranno utili nel seguito. Siano dati i valori ..., f_{-1}, f_0, f_1, ... di una funzione $f(x)$ in corrispondenza ai valori equidistanti $x_r = x_0 + rw$ (w costante) della variabile indipendente x:

$$f_r = f(x_r) \qquad (r = ..., -1, 0, 1, ...).$$

Se in intervalli consecutivi, di ampiezza $3w$, si possono trascurare le differenze finite di f, dal 4° ordine in poi, la funzione, in detti intervalli, può approssimarsi con un polinomio di 3° grado. Noi ammetteremo che la funzione continui ad essere approssimata (per estrapolazione) con il detto polinomio su tutta l'estensione di un intervallo di ampiezza $6w$. Conoscendo per es. f_0, f_1, f_2, f_3, con l'applicazione della formula di Lagrange per punti equidistanti, si vede facilmente che risulta:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f_4 = 4f_3 - 6f_2 + 4f_1 - f_0 \\ f_5 = 10f_3 - 20f_2 + 15f_1 - 4f_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

ed in generale:

$$(2) \qquad f_n = \sum_{i=0}^{3} C_{n,i} f_i \qquad (n = 4, 5, ...)$$

con:

$$C_{n,i} = \frac{n!}{(n-4)!\,(n-i)} \frac{(-1)^{i+1}}{2(i^2 - 3i + 3)}.$$

Nel caso che si possono trascurare differenze finite, dal 6° ordine in poi *mutatis mutandis*, si ha:

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} f_6 = 6f_5 - 15f_4 + 20f_3 - 15f_2 + 6f_1 - f_0 \\ f_7 = 21f_5 - 70f_4 + 105f_3 - 84f_2 + 35f_1 - 6f_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

ed in generale:

$$\text{(4)} \qquad f_n = \sum_{i=0}^{5} C_{n,i} f_i \qquad (n = 6,\ 7, \dots)$$

con

$$C_{n,i} = \frac{n\,!}{(n-6)!\,(n-i)} \, \frac{(-1)^{i+1}}{3(i^4 - 10i^3 + 37i^2 - 60i + 40)}.$$

Formole analoghe alle precedenti sussistono per valori negativi di n (estrapolazione in senso retrogrado).

§ 2. Supponiamo ora che si voglia costruire numericamente la tavola della funzione $y(x)$, supposto che esista, soddisfacente all'equazione differenziale di 1° ordine:

$$\text{(5)} \qquad y' = F(x,\ y),$$

e tale che risulti $y(x_0) = y_0$ (condizione iniziale). Poniamo:

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} y_r = y(x_r) \\ f_r = wF(x_r,\ y_r), \end{cases}$$

e proponiamoci di calcolare y_{r+1}, supposti noti i valori di y e conseguentemente di f, in corrispondenza agli indici r, $r-1, \dots$

Rammentiamo che dalla nota formola sommatoria di EULER, relativa ad una funzione $\varphi(x)$:

$$\text{(7)} \qquad \sum_{r=0}^{r-1} \varphi_r = \frac{1}{w}\int_{x_0}^{x_r} \varphi(x)dx - \frac{1}{2}(\varphi_r - \varphi_0) + \frac{B_2}{2!} w(\varphi'_r - \varphi'_0) -$$

$$- \frac{B_4}{4!} w^3(\varphi_r''' - \varphi'''_0) + \frac{B_6}{6!} w^5(\varphi_r^{(5)} - \varphi_0^{(5)}) - \dots$$

dove B_2, B_4, $B_6, \dots$ sono i numeri di BERNOUILLI, e dalle formole che esprimono le derivate della funzione φ per mezzo delle sue differenze finite centrali, si può dedurre una formola di quadratura numerica ([2]), che noi preferiamo mettere sotto la forma pratica con

([2]) Cfr. E. WHITTAKER - G. ROBINSON, *The Calculus of Observations*. London, (1948), p. 146.

cui viene usata dagli astronomi per il calcolo delle perturbazioni speciali ([3]). Con il simbolismo di GAUSS-ENCKE, detta formola prende l'aspetto seguente:

$$\text{(8)}\qquad \frac{1}{w}\int_{x_0}^{r_r} \varphi(x)dx = {}^{\mathrm{I}}\varphi_r - \frac{1}{12} f_r^{\mathrm{I}} + \frac{11}{720} f_r^{\mathrm{III}} - \frac{191}{60480} f_r^{\mathrm{V}} + \dots$$

dove è:

$${}^{\mathrm{I}}\varphi_r = \frac{1}{2}\left\{ {}^{\mathrm{I}}\varphi_{r-\frac{1}{2}} + {}^{\mathrm{I}}\varphi_{1+\frac{1}{2}} \right\}$$

$$\varphi_r^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\left\{ \varphi^{\mathrm{I}}_{r-\frac{1}{2}} + \varphi^{\mathrm{I}}_{r+\frac{1}{2}} \right\}$$

. . . .

L'indice $r \mp \frac{1}{2}$, corrispondente al valore dell'argomento $x_0 + \left[r \mp \frac{1}{2}\right] w$, sta ad indicare che i corrispondenti valori di ${}^{\mathrm{I}}\varphi$, della colonna di sommazione, e quelli di φ^{I}, $\varphi^{\mathrm{III}}, \dots$, delle differenze finite dei vari ordini (dispari), sono situati su linee orizzontali intermedie tra $r - 1$ ed r ovvero tra r ed $r + 1$.

Il termine iniziale ${}^{\mathrm{I}}\varphi_{-\frac{1}{2}}$ della colonna di sommazione si calcola con la formola:

$$\text{(9)}\qquad {}^{\mathrm{I}}\varphi_{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\varphi_0 + \frac{1}{12}\varphi_0^{\mathrm{I}} - \frac{11}{720}\varphi_0^{\mathrm{III}} + \dots .$$

Volendo applicare la (8) al caso dell'equazione (5), noti i valori $y_0, \dots, y_r$ e per conseguenza anche quelli di $f_0, \dots, f_r$, si ha:

$$\text{(10)}\quad y_{r+1} = \frac{1}{2}\left\{ {}^{\mathrm{I}}f_{r+\frac{1}{2}} + {}^{\mathrm{I}}f_{r+\frac{3}{2}} \right\} - \frac{1}{24}\left\{ f^{\mathrm{I}}_{r+\frac{1}{2}} + f^{\mathrm{I}}_{r+\frac{3}{2}} \right\} + \frac{11}{1440}\left\{ f^{\mathrm{III}}_{r+\frac{1}{2}} + f^{\mathrm{III}}_{r+\frac{3}{2}} \right\} - \dots$$

una volta che si sia calcolato il termine iniziale della colonna di sommazione con:

$$\text{(11)}\qquad {}^{\mathrm{I}}f_{-\frac{1}{2}} = y_0 - \frac{1}{2}f_0 + \frac{1}{24}\left\{ f^{\mathrm{I}}_{-\frac{1}{2}} + f^{\mathrm{I}}_{\frac{1}{2}} \right\} - \frac{11}{1440}\left\{ f^{\mathrm{III}}_{-\frac{1}{2}} + f^{\mathrm{III}}_{\frac{1}{2}} \right\} + \dots .$$

La (10) è una formola di estrapolazione molto pratica, ma dal punto di vista del calcolo numerico ha un grave inconveniente: quello di non conoscere *a priori* tutti i termini che intervengono nel suo 2° membro. Le differenze finite che figurano in detto 2° membro dovrebbero essere estrapolate «a vista», in base al loro

([3]) Cfr. F. TISSERAND, *Mécanique Céleste.* Paris, (1896). Vol. IV, p. 178.

andamento anteriore. Il cosidetto metodo di ADAMS supera questa difficoltà usando termini, che sono situati sopra una diagonale ascendente *(Treppenlinie)* nel quadro delle differenze finite della funzione f ([4]).

Facendo però l'ipotesi della trascurabilità delle differenze di ordine sufficientemente elevato di f, dalla stessa (10) è facile dedurre altri tipi di estrapolazione, che si prestano per integrare numericamente la (5).

Cominciamo infatti col supporre che siano trascurabili le differenze dal 4° ordine in poi. Avendosi:

$$^{\mathrm{I}}f_{\frac{9}{2}} = {}^{\mathrm{I}}f_{\frac{7}{2}} + f_4$$

$$f^{\mathrm{I}}_{\frac{7}{2}} + f^{\mathrm{I}}_{\frac{9}{2}} = f_5 - f_3$$

$$f^{\mathrm{III}}_{\frac{7}{2}} + f^{\mathrm{III}}_{\frac{9}{2}} = f_6 - 2f_5 + 2f_3 - f_2,$$

per le (1) risulta:

$$^{\mathrm{I}}f_{\frac{9}{2}} = {}^{\mathrm{I}}f_{\frac{7}{2}} + 4f_3 - 6f_2 + 4f_1 - f_0$$

$$f^{\mathrm{I}}_{\frac{7}{2}} + f^{\mathrm{I}}_{\frac{9}{2}} = 9f_3 - 20f_2 + 15f_1 - 4f_0$$

$$f^{\mathrm{III}}_{\frac{7}{2}} + f^{\mathrm{III}}_{\frac{9}{2}} = 2f_3 - 6f_2 + 6f_1 - 2f_0.$$

Sostituendo le precedenti nella (10), quando vi si faccia $r = 3$ e arrestandola ai termini di 3° ordine, dopo facili riduzioni, arriviamo a:

$$y_4 = {}^{\mathrm{I}}f_{\frac{7}{2}} + \frac{1}{720}(1181 f_3 - 1593 f_2 + 1023 f_1 - 251 f_0), \tag{12}$$

cioè ad un'espressione del tipo:

$$y_4 = {}^{\mathrm{I}}f_{\frac{7}{2}} + \sum_{k=0}^{3} C_k f_k, \tag{13}$$

dove i coefficienti C_k hanno i seguenti valori numerici:

$$C_0 = -0.348611 \quad , \quad C_2 = -2.212500$$
$$C_1 = +1.420833 \quad ; \quad C_3 = +1.640278 \qquad \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_k = \frac{1}{2}\right).$$

([4]) Cfr. E. KAMKE, *Differentialgleichungen*. New York, (1948), p. 145. Cfr. anche G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*. Bologna, (1949), p. 288 e seg.

La formola di estrapolazione generale dopo si può scrivere nel seguente modo:

$$y_{r+1} = {}^{\mathrm{I}}f_{r+\frac{1}{2}} + \sum_{k=0}^{3} C_k f_{r+k-2}\,. \tag{14}$$

In modo analogo, se si suppone che siano trascurabili le differenze di f a partire dal 6^{o} ordine in poi, si ha:

$$y_6 = {}^{\mathrm{I}}f_{\frac{11}{2}} + \frac{1}{60480}(138241 f_5 - 309047 f_4 + 396502 f_3 - \\ - 291754 f_2 + 115385 f_1 - 19087 f_0) \tag{15}$$

ed in generale:

$$y_{r+1} = {}^{\mathrm{I}}f_{r+\frac{1}{2}} + \sum_{k=}^{5} C_k f_{r+k-5}\,, \tag{16}$$

dove i coefficienti numerici C_k hanno ora i seguenti altri valori

$$\begin{array}{lll} C_0 = -0.315592 \;, & C_3 = +6.555919 & \\ C_1 = +1.907821 \;, & C_4 = -5.109904 & \left(\sum_{k=0}^{5} C_k = \frac{1}{2}\right). \\ C_2 = -4.823975 \;, & C_5 = +2.285731 & \end{array}$$

§ 3. Le formole di estrapolazione (14) e (16) sono di facile applicazione pratica, come abbiamo avuto occasione di sperimentare in diversi calcoli d'integrazione, specialmente se, per effettuarli, si utilizzano comuni macchine calcolatrici, con un dispositivo che consente l'accumulazione dei prodotti parziali provenienti dai termini delle combinazioni lineari, indicate nelle sommatorie dei secondi membri. Pur dando la preferenza alle formole anzidette, che fanno a meno delle differenze di f, consigliamo sempre la formazione del quadro di dette differenze, per i motivi seguenti: 1°) per avere, durante l'esecuzione dei calcoli, degli elementi di giudizio su cui fondare l'accettabilità dei risultati ottenuti e per evitare anche i piccoli errori, che altrimenti sfuggirebbero all'attenzione del calcolatore; 2°) per stabilire, quando sia necessario, l'abbandono di una formola di estrapolazione, sostituendola con un'altra di maggiore o minore portata; 3°) per potere applicare *a posteriori* la formola (10) come formola di controllo; 4°) per permettere infine l'intercalazione, nella tavola numerica di $y(x)$, di altri valori tabulari, come sarà mostrato nel § seguente.

Le espressioni teoriche del resto delle formole (14) e (16) possono dedursi dalla corrispondente espressione del resto della formola (7) di EULER, dovuta al MALMSTEN [5]; nella pratica però dette espres-

[5] Cfr. C. J. MALMSTEN, *J. reine ang. Math.*, (1847), 35, p. 55.

sioni teoriche hanno scarsa importanza, per la difficoltà di non riuscire a trovare facilmente, negli intervalli che interessano, un limite superiore del valore assoluto delle derivate di ordine elevato della funzione f. Per cui, con molto più vantaggio, si ricorre all'esame del valore assoluto delle differenze finite di f, per vedere quali siano quelle trascurabili nell'ordine della precisione decimale con cui si effettuano i calcoli.

Facciamo vedere infine come sia possibile, con un'ulteriore trasformazione, fare acquistare alle nostre formole di estrapolazione, la forma datale dal MILNE [6], che le dedusse con un procedimento diverso da quello qui esposto [7].

Esprimiamo p. es. ${}^{\mathrm{I}}f_{\frac{7}{2}}$ in funzione di ${}^{\mathrm{I}}f_{-\frac{1}{2}}$ e di $f_0, \ldots, f_3$.

$$ {}^{\mathrm{I}}f_{\frac{7}{2}} = {}^{\mathrm{I}}f_{-\frac{1}{2}} + \sum_{i=0}^{3} f_i $$

e poichè, com'è facile riconoscere, si ha:

$$ {}^{\mathrm{I}}f_{-\frac{1}{2}} = y_0 - \frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{24}(f_3 - 4f_2 + 7f_1 - 4f_0) - \frac{11}{1440}(2f_3 - 6f_2 + 6f_1 - 2f_0), $$

eseguendo alcune riduzioni, la (12) si trasforma in:

$$ y_4 - y_0 = \frac{4}{3}(2f_3 - f_2 + 2f_1). \tag{17} $$

Un ragionamento analogo si può ripetere sulla formola (15) e si trova:

$$ y_6 - y_0 = \frac{3}{10} \{ 11(f_5 + f_1) - 14(f_4 + f_2) + 26f_3 \}. \tag{18} $$

§ 4. In aggiunta alle considerazioni svolte precedentemente, nel §. 2, consideriamo utile segnalare altre espressioni di formole di estrapolazione, che permettono di calcolare i valori della funzione incognita $y(x)$, che soddisfa all'equazione (5), in corrispondenza ai punti medi degli intervalli (x_r, x_{r+1}).

A partire dalla formola di quadratura [8]:

$$ y_{r+\frac{1}{2}} = {}^{\mathrm{I}}f_{r+\frac{1}{2}} + \frac{1}{24} f^{\mathrm{I}}_{r+\frac{1}{2}} - \frac{17}{5760} f^{\mathrm{III}}_{r+\frac{1}{2}} + \frac{367}{967680} f^{\mathrm{V}}_{r+\frac{1}{2}} - \cdots \tag{19} $$

(6) Cfr. W. E. MILNE, *Numerical solution of Diff. Equations* New York, (1953), p. 49.

(7) Cfr. W. E. MILNE, *Amer. Math. Month.*, (1926), 33, p. 455.

(8) Cfr. F. TISSERAND, loc. cit. p. 183.

per $r = 3$ e trascurando differenze di ordine superiore al 3°, si ottiene:

$$y_{\frac{7}{2}} = {}^{I}f_{\frac{7}{2}} + \frac{1}{5760}\left(703 f_3 - 1389 f_2 + 909 f_1 - 223 f_0\right), \tag{20}$$

cioè un'espressione della forma:

$$y_{\frac{7}{2}} = {}^{I}f_{\frac{7}{2}} + \sum_{k=0}^{3} B_k f_k, \tag{21}$$

dove i coefficienti numerici B_k hanno i valori seguenti:

$$B_0 = -0.038715 \quad , \quad B_2 = -0.241146 \qquad \left(\sum_{k=0}^{3} B_k = 0\right).$$
$$B_1 = +0.157812 \quad , \quad B_3 = +0.122049$$

Eseguendo su ${}^{I}f_{\frac{7}{2}}$ la stessa trasformazione fatta nel § 3, si ottiene anche:

$$y_{\frac{7}{2}} - y_0 = \frac{1}{384}\left(441 f_3 + 245 f_2 + 539 f_1 + 119 f_0\right) = \sum_{k=0}^{3} B'_k f_k, \quad \left(\sum_{k=0}^{3} B'_k = \frac{7}{2}\right). \tag{22}$$

Analogamente, trascurando differenze di ordine superiore al 5°, per $r = 5$, dalla (19) si ottiene:

$$y_{\frac{11}{2}} = {}^{I}f_{\frac{11}{2}} + \sum_{k=0}^{5} B_k f_k \tag{23}$$

con

$$B_0 = -0.033192 \quad , \quad B_3 = +0.704313$$
$$B_1 = +0.201723 \quad , \quad B_4 = -0.550160 \qquad \left(\sum_{k=0}^{5} B_k = 0\right).$$
$$B_2 = -0.513688 \quad , \quad B_5 = +0.191004$$

Le formole di estrapolazione (22) e (23) sono molto utili nelle applicazioni pratiche, quando nella tavola dei valori numerici della funzione $y(x)$, si vogliono inserire anche quelli che corrispondono al passo tavolare $\frac{1}{2} w$.

§ **5.** È facile estendere ai sistemi di equazioni differenziali ordinarie di 1° ordine ed alle equazioni di ordine superiore le formole di estrapolazione date nei § precedenti. Qui ci limiteremo a trattare il caso speciale dell'equazione di 2° ordine:

$$y'' = F(x, y) \tag{24}$$

la cui soluzione $y(x)$ soddisfi alle condizioni iniziali $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$. Questo tipo particolare di equazione, nella quale non figura esplicitamente la derivata y', s'incontra nello studio dei problemi di meccanica celeste. Per conoscere il movimento perturbato di un corpo del sistema solare bisogna infatti integrare un sistema di equazioni di 2° ordine del tipo (24).

Anche qui poniamo in generale:

$$\left\{ \begin{aligned} x_r &= x_0 + rw \\ f_r &= f(x_r) = w^2 F(x_r,\ y(x_r)) \end{aligned} \right. \qquad (r = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{25}$$

e partiamo dalla formola generale di doppia quadratura ([9]):

$$y_r = {}^{\mathrm{II}}f_r + \frac{1}{12} f_r - \frac{1}{240} f_r^{\mathrm{II}} + \frac{31}{60480} f_r^{\mathrm{IV}} - \ldots . \tag{26}$$

I termini iniziali ${}^{\mathrm{II}}f_0$ ed ${}^{\mathrm{I}}f_{\frac{1}{2}}$ delle colonne di sommazione doppia e semplice, rispettivamente, debbono calcolarsi con le espressioni:

$$\left\{ \begin{aligned} {}^{\mathrm{II}}f_0 &= y_0 - \frac{1}{12} f_0 + \frac{1}{240} f_0^{\mathrm{II}} - \frac{31}{60480} f_0^{\mathrm{IV}} + \ldots \\ {}^{\mathrm{I}}f_{\frac{1}{2}} &= w y_0' + \frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{12} f_0^{\mathrm{I}} - \frac{11}{720} f_0^{\mathrm{III}} + \ldots . \end{aligned} \right. \tag{27}$$

Facendo uso, secondo i casi, delle formule (1) o (3), è facile arrivare, dopo alcune riduzioni e semplificazioni, alle seguenti formole di estrapolazione per il calcolo numerico della funzione incognita $y(x)$:

A) *Caso di 4 ordinate.* Si ha dalla (26) per $r = 4$:

$$y_4 = {}^{\mathrm{II}}f_4 + \frac{1}{240} (77 f_3 - 112 f_2 + 73 f_1 - 18 f_0) \tag{28}$$

ed in generale:

$$y_{r+1} = {}^{\mathrm{II}}f_{r+1} + \sum_{k=0}^{3} A_k f_{r+k-3}, \tag{29}$$

dove i coefficienti numerici A_k hanno i seguenti valori:

$$\begin{aligned} A_0 &= -\ 0.075000 \quad , \quad A_2 = -\ 0.466667 \\ A_1 &= +\ 0.304167 \quad , \quad A_3 = +\ 0.320833 \end{aligned} \quad \left(\sum_{k=0}^{3} A_k = \frac{1}{12} \right) .$$

B) *Caso di 6 ordinate.* Per $r = 6$ si ha invece:

$$\begin{aligned} y_6 = {}^{\mathrm{II}}f_6 + \frac{1}{60480} (27844 f_5 - 66109 f_4 + 85536 f_3 - \\ - 63046 f_2 + 24940 f_1 - 4125 f_0) \end{aligned} \tag{30}$$

([9]) Cfr. F. Tisserand, loc. cit. p. 189.

ed in generale:

$$y_{r+1} = {}^{\text{II}}f_{r+1} + \sum_{k=0}^{5} A_k f_{r+k-5} \tag{31}$$

con

$$\begin{array}{lll} A_0 = -\,0.068204 \;, & A_3 = +\,1.414286 & \\ A_1 = +\,0.412368 \;, & A_4 = -\,1.093072 & \left(\sum\limits_{k=0}^{5} A_k = \dfrac{1}{12}\right). \\ A_2 = -\,1.042427 \;, & A_5 = +\,0.460384 & \end{array}$$

Anche qui è da osservare che il processo di estrapolazione è stato spinto innanzi, di un numero di passi tavolari sufficiente per potere includere nel quadro delle differenze fornite della funzione f, quelle di tali differenze che sono necessarie per l'applicazione della formola (26), la stessa (26) può servire da formola di controllo. Se i valori ottenuti p. es. con la formola (28), presentano notevoli discrepanze, rispetto a quelli ottenuti con la (26), allora il calcolo dovrebbe ripetersi in 2ª approsimazione, usando formole di estrapolazione con un numero maggiore di ordinate. Questo inconveniente, della ripetizione del calcolo, si può evitare scegliendo sufficientemente piccolo l'intervallo costante w d'integrazione. Nel caso dei movimento dei pianetini per esempio, eseguendo i calcoli con 7 cifre decimali, la scelta dell'intervallo w di 40 giorni (in casi eccezionali 20, quando l'integrazione si effettua nelle vicinanze del perielio dell'orbita), soddisfa alle esigenze richieste.