Bollettino Unione Matematica Italiana

Marziano Marziani

Su un principio di minimo dell'elettrodinamica stazionaria dei superconduttori ciclici.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **9** (1954), n.4, p. 409–412.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1954_3_9_4_409_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1954.

Su un principio di minimo dell'elettrodinamica stazionaria dei superconduttori ciclici.

Nota di MARZIANO MARZIANI (a Ferrara)

Sunto. - *Si dimostra che le supercorrenti si distribuiscono in un superconduttore ciclico in modo da rendere minima l'energia totale del campo.*

1. Nella teoria matematica della superconduttività, svolta da F. LONDON e da altri Autori (1) e da me recentemente ripresa (2), il fenomeno, in condizioni stazionarie, viene rappresentato, all'interno del superconduttore, mediante il sistema di equazioni differenziali, con riferimento ad unità gaussiane:

$$c \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \tag{1}$$

$$c \operatorname{rot} \lambda \boldsymbol{j} = - \boldsymbol{H} \tag{2}$$

dove $\boldsymbol{H}$ è il campo magnetico stazionario, $\boldsymbol{j}$ la densità di supercorrente, c la velocità della luce nel vuoto e λ un parametro, funzione della temperatura, e dell'ordine di grandezza di 10^{-32} sec^2.

La supercorrente è dunque legata sempre a un campo magnetico che, nel caso di superconduttori aciclici è applicato dall'esterno, mentre nel caso di correnti anulari permanenti, esso è dovuto alla corrente stessa.

In questo secondo caso sussiste il seguente teorema di unicità per un superconduttore ciclico $(n+1)$ -volte connesso, percorso da supercorrente e non soggetto all'azione di correnti o di corpi magnetici esterni (3): Il campo magnetico $\boldsymbol{H}$ e la densità $\boldsymbol{j}$ di supercorrente sono univocamente determinati dalle correnti totali

$$i_r = \int_{\sigma_r} \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{n} d\sigma_r \qquad (r = 1,2 \dots n) \tag{3}$$

attraverso le sezioni caratteristiche σ_r del superconduttore (4).

(1) F. LONDON, *Superfluids*, vol. I, New York, John Wiley & Sons, inc. 1950.

M. VON LAUE, *Theorie der Supraleitung*, Berlin, Göttingen - Heidelberg, Springer - Verlag, 1949.

(2) M. MARZIANI, *Sul teorema di reciprocità dello stato superconduttivo stazionario*, Rend. Acc. Naz. dei Lincei, in corso di stampa.

(3) Cfr. F. LONDON, loc. cit. pp. 74-77.

(4) Diremo sezioni caratteristiche σ_r $(r = 1,2 \dots n)$ di un superconduttore ciclico $(n+1)$ - volte connesso, gli n diaframmi ideali che assieme alla superficie σ del dominio superconduttore, lo rendono aciclico. Poichè la $\boldsymbol{j}$ è solenoidale, le correnti totali i_r, attraverso due sezioni σ_r relative allo stesso buco r-esimo, sono uguali.

($n =$ versore normale a σ_r), o dai flussi generalizzati (fluxoids secondo il LONDON)

$$\Phi_r = c\lambda \oint_{l_r} j \times dP + \int_{\Sigma_r} H \times n d\Sigma_r \qquad (r = 1,2 \ldots n) \tag{4}$$

dove l_r è una linea chiusa, luogo dei punti P, interna al superconduttore, circondante il buco r–esimo del superconduttore, Σ_r una superficie avente per orlo la l_r [5].

In questa nota mi propongo di dare un'interpretazione energetica di tale teorema, dimostrando il seguente principio di minimo: *nelle ipotesi sòpra dichiarate, le supercorrenti si distribuiscono in un superconduttore ciclico in modo da rendere minima l'energia totale del campo.*

Da questo principio è possibile dedurre l'unicità della soluzione del problema superconduttivo, conforme al teorema sopra enunciato.

2. Com'è noto [6] l'energia totale U nello stato superconduttivo, consta, in generale, oltre che dell'energia (potenziale) elettrica e magnetica, come nella conduzione ordinaria, anche dell'energia cinetica, di densità $\frac{\lambda j^2}{2}$, della supercorrente [7]. In condizioni stazionarie, essendo nullo il campo elettrico, detto S il dominio superconduttore, che supponiamo ciclico, $(n+1)$ -volte connesso, e S_∞ lo

[5] Come segue dalla (2), applicando il teorema di STOKES, Φ_r non dipende dalla scelta della linea l_r che circonda il buco non superconduttore r-esimo.

[6] Cfr. F. LONDON, loc. cit. pag. 66.

[7] Tale energia è dovuta, com'è noto, all'inerzia degli elettroni di superconduzione. Se infatti diciamo N il loro numero per unità di volume (funzione della temperatura) e la carica e v la velocità di uno di essi, essendo $j = Nev$ la loro energia cinetica per unità di volume vale $\frac{1}{2} Nmv^2 = \frac{1}{2}\lambda j^2$ con $\lambda = \frac{m}{Ne^2}$. Nella conduzione ordinaria l'inerzia degli elettroni viene, in genere, trascurata e l'equazione del moto di uno di essi, nel campo elettrico E, indicata con $-fv$ $(f > 0)$ la forza d'attrito dovuta agli urti,

$$m\frac{dv}{dt} = eE - fv$$

cioè

$$\lambda \frac{dj}{dt} = E - Rj \qquad \text{con } R = \frac{f}{Ne^2}$$

che porterebbe a una relazione di tipo ereditario tra E e j, viene ridotta, essendo R molto grande, alla $E = Rj$, cioè alla legge di OHM.

spazio esterno vuoto, l'energia totale assume quindi l'espressione:

$$U = \frac{1}{2}\int_{S_\infty} \boldsymbol{H}^2 dS_\infty + \frac{1}{2}\int_S (\boldsymbol{H}^2 + \lambda j^2) dS\,. \tag{5}$$

Sia ora $\boldsymbol{H}_1$ un altro campo magnetico stazionario e j_1 la distribuzione di densità di corrente con esso compatibile (e quindi soddisfacente con $\boldsymbol{H}_1$ alla (1)) con la sola ipotesi ulteriore di soddisfare alla (3). In tal caso l'energia totale U, corrispondente alla distribuzione di supercorrente è minima rispetto all'energia totale U_1 di qualunque altra distribuzione $(\boldsymbol{H}_1, j_1)$ soddisfacente alla (1) e alla (3). Si ha cioè:

$$U < U_1\,. \tag{6}$$

Per la dimostrazione osserviamo che posto

$$\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}' \qquad\qquad j_1 = j + j'$$

detta U' l'energia totale della distribuzione $(\boldsymbol{H}', j')$, risulta:

$$U_1 = \frac{1}{2}\int_{S_\infty} \boldsymbol{H}_1^2 dS_\infty + \frac{1}{2}\int_S (\boldsymbol{H}_1^2 + \lambda j_1^2) dS =$$

$$= U + U' + \int_{S_\infty} \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}' dS_\infty + \int_S (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}' + \lambda j \times j') dS = \quad [8]$$

$$= U + U' + \frac{1}{c}\sum_{1}^{n}{}_r \Phi_r i_r'$$

con

$$i_r' = \int_{\sigma_r} j' \times n d\sigma_r \qquad\qquad (r = 1,\ 2 \ldots n)\,.$$

Ma la (3), per ipotesi, vale sia per j che per j_1 e quindi $i_r' = 0$ $(r = 1,\ 2 \ldots n)$ e poichè $U' > 0$, ne segue la (6).

Da quanto ora si è detto, segue anche che, date le correnti totali, non possono esservi due diverse soluzioni del problema superconduttivo, conforme al teorema di unicità sopra enunciato.

[8] Detta Σ una superficie chiusa che circonda i punti singolari del campo, risulta in generale (cfr. M. MARZIANI, loc. cit. formula (7)):

$$\int_{s_\infty} \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}' ds_\infty + \int_s (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H}' + \lambda j \times j') ds = \int_\Sigma (\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{H}') \times \boldsymbol{n} d\Sigma + \frac{1}{c}\sum_{1}^{n}{}_r \Phi_r i_r'$$

con rot $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}$. L'integrale di superficie rappresenta appunto il contributo di tutte le sorgenti esterne. Nel nostro caso però tale contributo è nullo, poichè non esistono, per ipotesi, all'esterno del superconduttore, nè correnti, nè corpi magnetici.

Infatti se anche $(\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{j}_1)$, diverso da $(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{j})$, soddisfacesse alla (2), oltre che alla (1) e alla (3), ripetendo le considerazioni precedenti si avrebbe:

$$U = U_1 + U' - \frac{1}{c} \sum_1^n {}_r \Phi_{1,r} i_r' \tag{7}$$

dove $\Phi_{1,r}$ $(r = 1, 2 \ldots n)$ sono i flussi generalizzati relativi alla distribuzione $(\boldsymbol{H}_1 \boldsymbol{j}_1)$. E quindi dalla (7), essendo $i_r' = 0$ $(r = 1, 2 \ldots n)$ e $U' > 0$ risulterebbe

$$U > U_1$$

ciò che è impossibile, perchè contrario alla (6) che, anche in questo caso, continuerebbe a sussistere.

Le analogie del teorema di minimo, ora dimostrato, col teorema di THOMSON, dell'elettrostatica ordinaria sono evidenti.