Bollettino Unione Matematica Italiana

UMI

Recensioni.

* Salvatore Pincherle, Opere scelte, Edizioni Cremonese, Roma, 1954 (Ugo Amaldi)
* Francesco Tricomi, Lezioni sulle equazioni a derivate parziali, Ed. Gheroni, Torino, 1954 (Gaetano Fichera)
* Giuseppe Pompilj, Diego Napoitani, Piano degli esperimenti ed elaborazione probabilistica dei risultati, C.N.R., Roma, 1954 (Bruno de Finetti)
* Centro Internazionale Matematico Estivo, (C.I.M.E.), I° Ciclo, Varenna, Villa Monastero, 9-18 giugno 1954, Analisi FUnzionale (Francesco Succi)
* A. J. Chintshin, Drei Perlen der Zahlentheorie, Akademie Verlag, Berlin, 1951 (Marco Cugiani)
* Helmut Hasse, Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper, Akademie Verlag, Berlin, 1952 (Marco Cugiani)
* Richard G. Cook, Linear Operators - Spectral Theory and some other applications, McMillan, London, 1953 (Giovanni Sansone)
* Paul Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatories, Seconda Edizione, Gauthier-Villars, 1954 (Bruno de Finetti)

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.1, p. 102–120.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_1_102_0>

RECENSIONI

SALVATORE PINCHERLE, *Opere scelte*, a cura della Unione Matematica Italiana, Edizioni Cremonese. Roma 1954, volume I, pp. VI-397, L. 3.500; volume II, pp. 493, L. 4.500.

Nel 1953 ricorreva il centenario della nascita di SALVATORE PINCHERLE; e un gruppo di Suoi discepoli pensò di celebrare quella ricorrenza, pubblicando una selezione delle Memorie scientifiche più caratteristiche e significative del Maestro. Il prof. Sansone, avuta notizia di tale proposito, vi aderì con entusiasmo e volle che la progettata pubblicazione si effettuasse sotto gli auspici e a cura della Unione Matematica Italiana, della quale il PINCHERLE fu, nel 1922, il fondatore e poi, fino alla Sua scomparsa (1936), l'illuminato e attivissimo Presidente. Alla iniziativa si associarono, anche con generosi contributi finanziari, l'Accademia Nazionale dei Lincei, l'Accademia Benedettina delle Scienze di Bologna, quell'Università, quella Facoltà d'Ingegneria, quell'Istituto Matematico, che si fregia del nome del PINCHERLE, le Case Editrici Zanichelli e Cremonese, nonchè una numerosa schiera di antichi discepoli.

Il compito di realizzare l'impresa fu dalla Presidenza dell'U.M.I. affidata ad un Comitato costituito da G. Belardinelli, S. Cinquini, D. Graffi, A. Mambriani, L. Onofri e da me; e, fin dall'inizio, il grave ufficio di curare la pubblicazione fu più particolarmente deferito al Mambriani, conoscitore profondo dell'opera del Maestro.

Come ben si comprende, questo Comitato si trovò di fronte ad un problema estremamente difficile e delicato. Fra le duecentocinquanta Memorie e Note, che, insieme con una ventina di corsi di lezioni e di trattati, costituiscono la vasta e differenziata produzione del PINCHERLE, si doveva scegliere un gruppo di lavori, che, pur nella sua ragionevole ristrettezza, bastasse a mettere in luce, sotto i suoi molteplici aspetti, quella nobilissima opera matematica. In base a reiterati scambi di idee, ai quali recò un prezioso contributo di consigli anche B. Segre, e grazie soprattutto al meditato lavoro di revisione e comparazione compiuto dal Mambriani, si fu condotti a scegliere trentotto lavori, di cui alcuni sono Memorie poderose, altri invece brevi Note riassuntive; e fra essi figura quell'ampia « Notice », che il PINCHERLE stesso, nel 1925, si indusse a redigere sull'insieme delle Sue ricerche per gli « Acta Mathematica », in seguito ad esplicita richiesta, spontaneamente e personalmente rivoltaGli , durante il Congresso matematico di Toronto, dal Mittag-Leffler, e che, come ben dice il Mambriani nella sua prefazione al primo di questi due volumi, « fornisce un quadro limpidissimo, ma senza dubbio troppo onestamente modesto ed obiettivo, della evoluzione del pensiero matematico del PINCHERLE ».

In un certo senso i criteri direttivi della selezione si son potuti desumere appunto da questa preziosa « Notice », con cui — dopo la commemorazione del PINCHERLE, da me tenuta all'Accademia dei Lincei, e dopo l'elenco completo delle Sue pubblicazioni — si inizia il primo volume di queste *Opere scelte*. Come criterio di classificazione e di presentazione degli altri trentasette lavori, si è preferito il puro e semplice ordine cronologico, come quello che è apparso più atto a mettere in luce il naturale progressivo sviluppo della attività di ricercatore del PINCHERLE; e la loro ripartizione nei due diversi volumi rispecchia in qualche modo le due successive fasi, nettamente rilevabili in codesta attività. In una prima fase, il PINCHERLE, superate le iniziali incertezze, e voltosi definitivamente — sotto il forte influsso delle lezioni del Weierstrass — alla teoria delle funzioni di variabile complessa, alla quale si mantenne tenacemente fedele, andò cimentandosi nelle prime prove di indagine autonoma su problemi, cui si adattavano quelle considerazioni di carattere operatorio, verso le quali doveva in seguito orientarsi sempre più decisamente; e in svariati indirizzi raccolse, quasi in via di esperimento, un ricco materiale di osservazioni, di raffronti, di risultati concreti, da cui, anche traverso una larga analisi critica dei vecchi metodi di Calcolo simbolico, trasse impulso a concepire, intorno al 1894, il disegno di elaborare, nel campo complesso, una teoria sintetica delle operazioni funzionali lineari o, com'Egli preferiva dire, *distributive*, la quale, conservando l'agilità di quegli antichi metodi, conducesse a procedimenti di effettiva validità controllabile quanto meno caso per caso, così da costituire un nuovo ramo della teoria delle funzioni. Seguì la seconda fase, in cui, maturato oramai l'assetto sistematico del Suo « calcolo funzionale distributivo », si diede a rielaborarne gli sviluppi, a saggiarne le possibilità, a illustrarne la portata e le applicazioni.

Fra gli ordini di problemi affrontati dal PINCHERLE nel primo di codesti due periodi mi limito a ricordare quegli sviluppi in serie secondo prestabiliti sistemi di funzioni analitiche, che, come oggetto di ricerca, costituivano in quel tempo (1882) una novità; i problemi di inversione di integrali definiti nel campo complesso, dei quali il PINCHERLE fra i primi ravvisò e approfondì i nessi con le questioni or ora accennate sugli sviluppi in serie; i sistemi ricorrenti e la generalizzazione delle frazioni continue nel campo delle funzioni di variabile complessa; le operazioni funzionali rappresentate da integrali curvilinei contenenti parametri e, in particolare, la trasformazione di Eulero e soprattutto quella del Laplace e le sue applicazioni al Calcolo delle differenze finite; le funzioni ipergeometriche e le loro generalizzazioni. In ciascuno di questi ordini d'indagine il PINCHERLE ottenne risultati precisi ed espressivi e se ne ha la conferma ricordando, ad esempio, la larga parte che alle ricerche del PINCHERLE il Nörlund riserva nelle sue magistrali « Vorlesungen über Differenzenrechnung » e il rilievo che agli sviluppi e ai risultati del PINCHERLE sulla trasformazione del Laplace dà nel suo classico trattato il Doetsch.

Degli apporti salienti e caratteristici del PINCHERLE in quel primo periodo della Sua attività è presentato un quadro pressochè completo nel primo di questi due volumi, che si conclude con tre Note, in qualche modo preventive, sulla geometria degli « spazi funzionali », che Egli, forse per primo, concepiva come spazi vettoriali astratti ad una infinità numerabile di dimensioni.

Il secondo volume si inizia col poderoso e fondamentale « Mémoire sur le Calcul fonctionnel distributif » dei « Mathematische Annalen » (1897), che, anche nella progressiva evoluzione del pensiero matematico del PINCHERLE, occupa un posto centrale, in quanto da un lato costituisce la prima sintesi sistematica delle idee via via maturate e dei risultati generali conseguiti nel primo Suo ventennio di indagini, e, d'altro canto, nella profonda e informatissima introduzione storica e nei larghi riferimenti ad altri indirizzi caratteristici della Matematica di quel tempo, chiarisce le origini e le ragioni di quel programma di lavoro, cui si ispirano i vari ordini di ricerche posteriori del PINCHERLE, delle quali si trovano per così dire condensate in questo secondo volume le conclusioni più significative: operazioni atte ad aggiungere o a togliere singolarità in una funzione analitica; teoria sintetica della trasformazione del Laplace e, in particolare, suoi nessi con la teoria delle serie divergenti; funzioni determinanti e rispettive funzioni generatrici nel senso del Laplace e dell'Abel; sviluppi in serie di fattoriali; sviluppi asintotici e serie sommabili secondo il Borel; classificazione delle operazioni distributive, e delle corrispondenze funzionali ad esse associate, in relazione con le proprietà analitiche del nucleo e con la distribuzione degli autovalori e delle autofunzioni, che il PINCHERLE aveva considerato quando ancora non ne era stato nemmeno coniato il nome; infine omografie negli spazi funzionali, duplice tipo di degenerazione possibile per esse e formulazione in quegli spazi di una legge di dualità, in base alla quale si associa ad ogni operazione distributiva una sua duale od « aggiunta », che generalizza l'« aggiunta » del Lagrange per le forme differenziali lineari e quell'altra operazione, che lo stesso PINCHERLE aveva introdotto sotto il medesimo nome per le forme lineari alle differenze finite.

Il volume si conclude con la comunicazione presentata dal PINCHERLE al Congresso di Toronto. Fra i matematici là convenuti la Sua austera, veneranda personalità suscitò un così largo consenso di simpatia e di fiduciosa considerazione che a Lui fu affidato il compito di organizzare a Bologna il Congresso successivo, col mandato — estremamente arduo in quel mondo ancora turbato e diviso, dopo la prima grande guerra, da tenaci rancori e da passioni politiche mal sopite — di assicurare al nuovo Congresso quella effettiva e completa internazionalità di adesioni e di interventi, che a Toronto non si era potuta realizzare. Il PINCHERLE, grazie ad uno sforzo di saggezza, di tatto, di energia — veramente mirabile in un settantacinquenne — raggiunse in pieno lo scopo prefissoGli; e si può dire che quello sia stato il coronamento ideale della Sua vita nobilissima.

Alla memoria del Matematico insigne, dell'indimenticabile Maestro, esempio luminoso d'illibata elevatezza morale, la pubblicazione di queste Sue *Opere scelte* costituisce l'omaggio più degno e più durevole. Tutti i matematici italiani, specialmente quelli che ebbero la ventura di esserGli discepoli od amici, ne sono riconoscenti alla nostra Unione e al suo Presidente prof. Sansone; e un ringraziamento più particolarmente fervido va indirizzato al prof. Mambriani, al quale sono dovute, in modo pressochè esclusivo, la sapiente preparazione di questi « selecta » e la cura diligentissima della pubblicazione.

UGO AMALDI

FRANCESCO TRICOMI, *Lezioni sulle equazioni a derivate parziali*, Corso di Analisi Superiore. Anno Accademico 1953-54, Edit. Gheroni, Torino, Via Carlo Alberto 13, 1954, pp. 484.

È già stato più volte affermato, ed, autorevolmente, anche su questo Bollettino, che l'orientamento che può seguirsi nello scrivere un libro destinato agli allievi universitari varia, in genere, fra due tendenze che possono considerarsi come opposta l'una dell'altra. La prima cerca di sviluppare le varie teorie, che costituiscono l'oggetto del corso stesso, nel modo più piano possibile, evitando al massimo le difficoltà, anche a costo di sacrificare a questo scopo l'assoluto rigore e la generalità della trattazione, sicchè gli allievi possono giungere ai punti centrali dei vari argomenti senza eccessivo sforzo e tutti, o quasi, riescono ad avere un'idea sufficientemente chiara delle finalità e del campo di interessi relativi alle teorie apprese.

La seconda tendenza, invece, consiste nell'affrontare tutte le parti da trattarsi con pieno rigore logico e la massima generalità, nulla concedendo alla intuizione ed affrontando le varie difficoltà senza assumere ipotesi semplificatrici. Avviene allora che non tutti gli allievi sono in grado di seguire la trattazione, rimanendo molti arrestati da difficoltà che sono incapaci di sormontare. Però quelli che riescono a giungere sino in fondo troveranno di grande utilità, per la loro preparazione, lo studio compiuto.

Esistono nella letteratura matematica, antica e recente, esempi di trattati ispirati all'una o all'altra delle due estreme tendenze. Quale delle due sia da preferire non è cosa che debba qui dirsi, tanto più che qualsiasi affermazione in proposito ha valore puramente soggettivo e, d'altronde, si potrebbe, volendo a tutti i costi esprimere un parere, affermare che il giusto sta nel mezzo, con che si perviene a dare una soluzione del quesito tanto conciliante quanto, in fondo, banale. Quel che invece occorre qui dichiarare è che, dal punto di vista della prima delle due sopradette tendenze, il libro del Tricomi è, senza dubbio, da considerarsi eccellente. Esso si ispira allo stesso stile che informa la precedente Opera dell'A. sulle equazioni differenziali ordinarie, che tanto successo ha incontrato in una vasta cerchia di lettori e della quale la presente vuole essere una continuazione.

Dopo un primo capitolo introduttivo dedicato a richiamare i risultati salienti della teoria delle equazioni integrali lineari e quelli relativi ad alcune funzioni speciali dell'Analisi (funzione gamma, funzione ipergeometrica e casi particolari, funzioni di Bessel etc.), il capitolo secondo viene dedicato alle proprietà generali delle equazioni alle derivate parziali del I e del II ordine.

Viene prima considerata l'equazione del primo ordine in due variabili indipendenti e con considerazioni prevalentemente geometrico - intuitive ne viene sviluppata la teoria, pervenendo ai concetti di caratteristica e striscia caratteristica. Viene quindi considerato il problema di Cauchy e ne sono illustrati geometricamente i casi di incompatibilità.

Successivamente viene dato il concetto di integrale completo ed esposto il procedimento di Charpit per la sua determinazione, tramite un integrale primo del sistema caratteristico, relativo all'equazione che si considera. Sono poi indicate le estensioni ai casi di equazioni con più di due variabili indipendenti.

In vista del suo interesse nei problemi della Meccanica analitica, trova posto nel II capitolo una rapida trattazione della Teoria delle equazioni di Hamilton-Jacobi e dei corrispondenti sistemi canonici e vengono poste in luce le connessioni di questi con i problemi euleriani del Calcolo delle Variazioni. Viene successivamente riportato il classico esempio del problema dei due corpi.

Due paragrafi del capitolo II sono dedicati ai sistemi del primo ordine e per quelli lineari si perviene al concetto di completezza. Per i non lineari viene esposto il procedimento di integrazione formale fondato sulle parentesi di Poisson e di Jacobi.

Chiude il capitolo l'estensione del concetto di caratteristica alle equazioni del secondo ordine e la classificazione delle equazioni quasi lineari del secondo ordine, in due variabili indipendenti, in ellittiche, paraboliche ed iperboliche.

Il III capitolo è dedicato alle equazioni lineari del secondo ordine di tipo iperbolico. Vengono prima esposti i procedimenti per la riduzione a forma canonica di una siffatta equazione in due variabili e quindi è considerato il procedimento di Laplace di integrazione « in catena » con applicazione alla equazione di Euler-Poisson, che tanto interesse ha trovato, anche nella recente letteratura, per le sue applicazioni a questioni di Meccanica dei fluidi.

Successivamente viene studiato il problema di Cauchy, posto in luce il ruolo essenziale delle caratteristiche in tale problema e indicato il procedimento per costruire la funzione di Riemann. Anche il problema, detto di Darboux, consistente nel ricercare una soluzione dell'equazione iperbolica con assegnati valori su due caratteristiche, viene dall'A. considerato. Esso è risolto sia col metodo classico delle approssimazioni successive, sia usando la funzione di Riemann, sia, infine, numericamente, col metodo delle differenze finite.

Chiudono il capitolo una indicazione sui problemi connessi al movimento dei fluidi compressibili ed una breve trattazione delle equazioni iperboliche in più di due variabili indipendenti.

Appare, forse, desiderabile che in questo capitolo fosse stata data qualche notizia anche sui problemi vibratori, per equazioni iperboliche del secondo ordine, del tipo di Cauchy-Dirichlet e sulla connessione di essi con i problemi di autovalori per equazioni ellittiche.

A tali equazioni è dedicato il IV capitolo. Dopo aver esposte le classiche considerazioni relative alla riduzione a forma canonica di una equazione ellittica del secondo ordine in due variabili indipendenti, viene considerato il primo problema di valori al contorno (problema di Dirichlet) per l'equazione canonica in due variabili, dal punto di vista dell'unicità. L'indagine è condotta usando le consuete proprietà sui massimi e i minimi delle soluzioni dell'equazione omogenea. Viene successivamente considerata la questione dell'esistenza per il suddetto problema, relativamente alla equazione di Laplace. L'A. espone i procedimenti basati sull'impiego dei potenziali di doppio strato e sul metodo alternato di Schwarz. Viene anche fatto cenno dell'uso della rappresentazione conforme nella risoluzione dei problemi di Dirichlet e Neumann per l'equazione di Laplace nel piano.

Assai rapidamente vien poi accennato ai classici metodi esistenziali per il problema di Dirichlet relativo all'equazione canonica in due variabili ed è anche fatta parola dei relativi problemi di autovalori.

Trovansi anche informazioni su alcuni metodi di integrazione numerica e, in particolare, su quello delle differenze finite.

Il capitolo termina con una esposizione dei problemi connessi al movimento dei fluidi incompressibili e con quelli relativi alle classiche equazioni

$$\Delta_4 z = 0, \; \Delta_4 z - k^4 z = 0.$$

Il capitolo V inizia con la trattazione delle equazioni di secondo ordine paraboliche, per le quali vengono svolte le consuete considerazioni. In particolare viene trattata l'equazione del calore in due variabili e indicati i classici procedimenti risolutivi per il primo problema di valori al contorno, ad essa relativo. Si accenna anche al metodo delle differenze finite. Il caso in cui il dominio d'integrazione sia il semipiano $y \geq 0$ è trattato compiutamente.

Nella seconda parte del capitolo vengono considerate le equazioni del secondo ordine di tipo misto ed in particolare quella che per primo il Tricomi studiò nel 1923 e che adesso porta il Suo nome. L'aver allora pòsto e indagato i problemi relativi a questa equazione, costituisce, oggi, un vero titolo di merito per la Matematica italiana, dato il grande interesse che detta equazione trovò in seguito nelle applicazioni alla dinamica dei fluidi.

Dopo aver studiato l'equazione sia nel semipiano iperbolico che in quello ellittico, viene considerato e risoluto il problema « misto », oggi detto « di Tricomi », con un aggiornamento del metodo, già seguito dall'A. nella Sua celebre memoria del '23, consistente nel ricondurre il problema allo studio di una equazione integrale singolare.

Chiudono il capitolo le applicazioni alla Meccanica dei fluidi.

Non è da dubitare che l'edizione a stampa del libro, che è da augurarsi segua presto la presente litografata, in verità non perfetta dal punto di vista editoriale, incontrerà presso i Matematici lo stesso consenso delle precedenti Opere del Tricomi.

GAETANO FICHERA

GIUSEPPE POMPILJ - DIEGO NAPOLITANI, *Piano degli esperimenti ed elaborazione probabilistica dei risultati,* (Suppl. a « La Ricerca Scientifica »), C.N.R., Roma, 1954, pp. 206.

È noto che in molti paesi, e soprattutto negli Stati Uniti, la Statistica matematica costituisce uno dei campi di ricerca più intensamente coltivati dai matematici, ed una delle tecniche di più universale impiego da parte degli sperimentatori. Sarebbe fuori luogo analizzare qui le molteplici ragioni che spiegano perchè in Italia si sia fatto assai poco in tale campo, ma due fra le principali (e costituenti, nel loro insieme, un circolo vizioso da cui è difficile uscire) sono la scarsamente diffusa consapevolezza dell'utilità di tali metodi da parte di sperimentatori, aziende industriali, ecc. e la mancanza o scarsezza di tecnici provetti nell'applicarli e di matematici che li conoscano ed insegnino.

La pubblicazione del volumetto qui recensito segna un felice inizio di superamento di entrambe le difficoltà indicate, da una parte perchè deriva dall'inziativa del Direttore di un Istituto sperimentale che volle ivi tenuto un corso sui detti argomenti, e dell'altra perchè darà modo agli studiosi italiani di acquistare con facilità le nozioni essenziali. Per la precisione, il corso fu tenuto dal prof. Pompilj presso l'Ist. Naz. della Nutrizione (del C. N. R.) diretto dal prof. Sabato Visco, e la raccolta delle lezioni per la stampa fu curata da uno degli ascoltatori, il dott. Napolitani, assistente presso l'Ist. di Patologia speciale medica dell'Univ. di Napoli.

Queste stesse precisazioni rendono evidente che non si tratta di una esposizione dedicata principalmente ai matematici: vi sono delle considerazioni sul significato concettuale dei problemi, sviluppate abbastanza ampiamente all'inizio e riprese qua e là ove occorra, e per il resto la trattazione si basa sostanzialmente sullo svolgimento di numerose applicazioni (47) scelte in modo da illustrare progressivamente casi via via più complessi riguardanti i diversi tipi di problemi considerati. Le nozioni teoriche e matematiche su cui i metodi si basano riescono chiarite o adombrate con riferimento alle esemplificazioni; una trattazione più esauriente sotto questo punto di vista è comunque annunciata (G. Pompilj, *Teoria dei Campioni*).

Dopo il primo capitolo introduttivo (considerazioni preliminari, nozioni fondamentali), vengono illustrati nel secondo i vari tipi di analisi di dati sperimentali basate sui tre fondamentali indici: χ^2 di Pearson (analisi delle frequenze), t di Student (analisi delle medie), ed F di Fisher (analisi della varianza); da segnalare in particolare un procedimento di « analisi delle medie » introdotto dallo stesso Pompilj in analogia ad un procedimento del Fisher per le varianze, e che può opportunamente surrogarlo o integrarlo.

Il terzo capitolo riferisce sull'argomento più propriamente menzionato nel titolo: il « piano » degli esperimenti; uno dei fatti più significativi è infatti che il matematico non si limita più a indicare i metodi di elaborazione di osservazioni raccolte, ma interviene possibilmente già prima per suggerire il programma di esperimenti da seguire volendo ottenere il miglior risultato possibile, ossia quello che consente le conclusioni più significative a parità di onere. Apposite tecniche (disposizioni complete, ridotte, incomplete, casuali, a blocchi, a scacchiera) sono state elaborate a tale scopo e vengono qui esposte.

Perciò la lettura di questo volumetto, pur richiedendo, per il matematico, di essere integrata, se vorrà occuparsi dell'argomento quale matematico, con quella di trattazioni più teoriche, riuscirà probabilmente meglio di quest'altre a dare anche ad esso una informazione concreta sull'interesse teorico e pratico delle ricerche e delle applicazioni della statistica matematica. Agli sperimentatori, che hanno bisogno di apprendere chiaramente anzitutto la tecnica delle varie applicazioni, e di formarsi più che altro per analogia con altri esempi il senso di quel che in ogni caso si possa e convenga fare, il volumetto costituirà una guida esauriente.

BRUNO DE FINETTI

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO, (C. I. M. E), I° Ciclo, Varenna, Villa Monastero, 9-18 giugno 1954, *Analisi Funzionale* (1).

Questo volume contiene gli appunti delle lezioni tenute a Varenna durante il I Ciclo del C.I.M.E., dedicato a « *Funzionali analitici ed anelli normati* ». (Cfr. questo « Bollettino », 1954, n. 2, pag. 218), dai proff. L. Amerio, L. Fantappiè ed E. R. Lorch, e le conferenze tenute dai proff. M. Cugiani e G. B. Rizza. Le lezioni tenute dal prof. F. Pellegrino sull'anello con valutazione delle funzioni numeriche, non sono qui incluse; la teoria in esse delineata verrà pubblicata tra breve.

L'analisi funzionale lineare ha costituito l'argomento principale di questo I Ciclo. Il prof. Amerio ha esposto i risultati di Fredholm e di F. Riesz negli spazi di Hilbert secondo la brillante rielaborazione sintetica del Riesz stesso; il prof. Fantappiè ha sviluppato l'analisi funzionale lineare nel campo analitico (funzionali analitici) e le relative applicazioni (calcolo simbolico) che portano all'integrazione effettiva di numerosi tipi di equazioni dfferenziali, riprese dall'Amerio per il problema di Dirichlet relativo all'ellisse. Il prof. Lorch, riattaccandosi al limpido corso di analisi funzionale lineare sugli spazi di Banach,

(1) Edizione ciclostilata dell'Istituto Mat. dell'Università di Roma - L. 2.000.

da lui tenuto durante il precedente anno accademico all'Università di Roma (se ne veda la recensione in questo stesso « Bollettino ») ha sviluppato la teoria di Gelfand degli ideali negli anelli normati. Il prof. Pellegrino, infine, ha parlato dell'anello concreto, dotato di una valutazione (non normato) delle funzioni numeriche, dell'analisi funzionale su di esso e di alcune applicazioni all'aritmetica che ne discendono.

Questa è l'interessante materia trattata nel I Ciclo del Centro Estivo, Corso che è stato utilissimo a tutti i partecipanti, anche per la continua possibilità di contatti personali in una atmosfera quanto mai favorevole, e che ora, per mezzo di questo volume, potrà giovare anche a chi non è potuto intervenire.

Il corso del Prof. L. AMERIO, intitolato « *Questioni di analisi funzionale* », si divide in quattro parti. Nella prima parte l'A. tratta dello spazio hilbertiano L_2, e dei funzionali e trasformazioni lineari (cioè, distributive, omogenee e limitate) su di esso. Comincia con lo svolgere brevemente la teoria dello spazio L^2, esponendo le nozioni fondamentali ad esso relative, trattando delle varie nozioni di convergenza, e infine provando la separabilità di tale spazio. Introdotti i funzionali lineari, vien dimostrato il teorema di FRÉCHET-RIESZ (1907), e data la nozione di ortogonalità e di sistema ortonormale. È trattato il problema del prolungamento di un funzionale lineare definito in un sottospazio di L^2, e dimostrato il teorema di HAHN (1927). Si passa poi alle trasformazioni lineari in L^2, fra le quali vengono prese in particolare considerazione quelle completamente continue; si introducono quindi le trasformazioni integrali, e se ne dimostra la completa continuità.

La parte II, che è strettamente connessa con la precedente, svolge la teoria delle equazioni integrali di FREDHOLM, seguendo l'elegante metodo indicato e sviluppato da F. RIESZ (1918), e fondato sul concetto di completa continuità di una trasformazione; tale metodo ha un carattere spiccatamente geometrico, e conserva la sua validità anche per equazioni funzionali molto più generali: anzichè a trasformazioni integrali di L^2, si può infatti riferire a trasformazioni completamente continue di un qualsiasi spazio di BANACH (salvo lievi modificazioni), come hanno mostrato il RIESZ stesso nella sua fondamentale Memoria del 1918, e poi T. H. HILDEBRANDT (1928) e J. SCHAUDER (1930). Nel presente corso l'A. si limita alla considerazione delle trasformazioni integrali in L^2, ma è facile rilevare come l'esposizione in gran parte non è legata essenzialmente al carattere integrale di quelle trasformazioni, ma solo alla loro completa continuità. Considerata una trasformazione lineare completamente continua K (che nel corso, ripetiamo, è una trasformazione integrale) di L^2 in se stesso, vengono ad essa associati due sottospazi complementari N ed M di L_2, rispetto ai quali la trasformazione risulta riducibile, nel senso che trasforma sia N che M in se stessi. Il sottospazio N è caratterizzato dal fatto di essere il codominio della trasformazione $(I-K)^n$, con $n \geq \mu$ conveniente, mentre il sottospazio M è la varietà degli zeri della stessa trasformazione. La riducibilità della trasformazione K porta a considerare le due trasformazioni S ed R, che coincidono con K in N e M rispettivamente, mentre hanno, rispettivamente, M ed N come varietà di zeri. E' così possibile scrivere la decomposizione $K = S + R$ (a pag. 39, per errore di stampa, sta scritto $S + R = I$). Ambedue le trasformazioni S ed R risultano completamente continue, ed anzi di tipo integrale (se tale è K); inoltre S è una trasformazione integrale di tipo elementare, e possiede gli stessi autovettori di K. Queste circostanze permettono infine di dimostrare per la trasformazione K la cosidetta alternativa di FREDHOLM, riconducendola al caso delle trasformazioni integrali di tipo elementare; tale caso è supposto noto.

La parte III riguarda il problema di DIRICHLET. Sono ben noti gli stretti legami fra questo problema (e quello di NEUMANN) e la teoria delle equazioni integrali, il cui rapido sviluppo è connesso con lo studio di quei problemi (C. NEUMANN, H. POINCARÈ, I. FREDHOLM). Qui però l'A. non collega il problema di DIRICHLET alla teoria precedentemente svolta, ma espone (limitandosi al problema interno bidimensionale) la elegante soluzione datane da C. MIRANDA (1947), basata sul teorema di HAHN (che viene utilizzato in una forma più generale di quella data nella parte I di questo corso, dove è dimostrato solo per lo spazio L^2): si dimostra che la totalità C_1 delle funzioni continue sulla frontiera del dominio in cui si vuol risolvere il problema di DIRICHLET, e che su essa coincidono con funzioni armoniche nell'interno di tale dominio, esaurisce la totalità C delle funzioni continue sulla frontiera di esso: ciò segue subito dal teorema di HAHN, dopo aver mostrato che ogni funzionale lineare nullo su C_1 è necessariamente nullo anche su C.

Nella parte IV il problema di DIRICHLET viene studiato dal punto di vista analitico, deducendone la soluzione da quella del problema di CAUCHY: si risolve cioè l'equazione $\Delta u = 0$, assegnando i valori della soluzione e della sua derivata normale sul contorno del dominio in cui interessa risolvere il problema di DIRICHLET: in generale una tale soluzione non si potrà prolungare all'interno di tutto il dominio che interessa; ciò però si potrà ottenere determinando opportunamente i valori della derivata normale sul contorno. Questa impostazione del problema è dovuta a L. FANTAPPIÉ (1941), che l'ha utilizzata per dedurre rapidamente la formula di POISSON. Qui vengono esposte le ricerche dell'A. relative al caso del cerchio, dell'ellisse, e di una classe notevole di contorni razionali.

Come si vede, il contenuto del corso è assai ampio. L'esposizione, concisa, è sempre chiara, le dimostrazioni sono complete (all'infuori di pochissime eccezioni), e la lettura non presenta difficoltà anche al lettore meno esperto.

Il prof. L. FANTAPPIÈ, nel suo corso: « *I funzionali analitici e le loro applicazioni alla risoluzione delle equazioni alle derivate parziali* », ha esposto nelle loro linee generali i principi della teoria dei funzionali analitici, il calcolo rigo roso che ne discende per le funzioni di uno o più operatori lineari, e le applicazioni di questo alla risoluzione effettiva, in termini finiti, di equazioni funzionali lineari di tipo molto generale. È questa una sistemazione della teoria del calcolo simbolico che estende e perfeziona quella esposta nelle Memorie precedenti dell'A.

Vengono prima ricordate brevemente le proprietà fondamentali dell'interessante spazio funzionale analitico $\mathfrak{S}^{(1)}$ — noto anche col nome di « spazio di FANTAPPIÈ » — costituito dalle funzioni locali e « biregolari ». Funzione locale e biregolare essendo ogni funzione analitica $(y(t), M)$ definita e regolare in un aperto M (non necessariamente connesso) della sfera complessa, e nulla all'infinito se è ivi definita. Di fondamentale importanza per la struttura topologica di $\mathfrak{S}^{(1)}$ e per il seguito, è il teorema che caratterizza le regioni lineari di questo spazio, come la totalità delle funzioni $(y, M) \varepsilon \mathfrak{S}^{(1)}$ definite in uno stesso insieme chiuso A (non vuoto) della sfera complessa; regioni che sono perciò indicate con (A). Sono quindi date le prime definizioni e teoremi sui funzionali analitici lineari $(F[y(t)], (A))$. In particolare è poi studiata la loro indicatrice emisimmetrica $u(\alpha)$:

$$u(\alpha) = \begin{cases} F\left[\dfrac{1}{\alpha - t}\right] & \text{per} \quad \alpha \neq \infty \quad \text{e} \quad t \neq \alpha \\ 0 & \text{per} \quad \alpha = \infty \quad \text{e} \quad t \quad \text{finito} \end{cases}$$

— che è una funzione locale biregolare per α fuori di A — per mezzo della quale, in virtù del teorema suddetto sulle regioni lineari, è possibile stabilire la formula fondamentale della teoria dei funzionali analitici lineari:

$$F[y(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_C u(t) y(t) dt\ ; \quad (y,\ M) \varepsilon (A), \tag{1}$$

dove C è una curva « separatrice », e cioè una curva chiusa che separa le singolarità della (y, M), (cioè i punti di CM), da quelle della u.

Viene poi trattato il problema del calcolo rigoroso delle funzioni di un operatore lineare iterabile K di un campo funzionale H (anche non di $\mathfrak{S}$[1] Ricordata la nota corrispondenza di omomorfismo Θ_0: $p(\lambda) \longrightarrow p(K)$, fra i polinomi in una variabile e gli operatori lineari $p(K)$, che giustifica il calcolo simbolico di tali operatori, in vista di giungere ad un calcolo simbolico che permetta la risoluzione di equazioni funzionali lineari abbastanza generali, il Fantappiè ammette dapprima l'esistenza di una corrispondenza Θ fra le funzioni $g(\lambda)$ di un opportuno campo Φ, più ampio di quello dei polinomi, e gli operatori $g(K)$, che goda delle seguenti quattro proprietà fondamentali, che generalizzano in modo naturale quelle dell'omomorfismo Θ_0:

I. $g_1(\lambda) + g_2(\lambda) \longrightarrow g_1(K) + g_2(K)$

II. $g_1(\lambda) \cdot g_2(\lambda) \longrightarrow g_1(K) \cdot g_2(K)$

III. $1,\ \lambda \longrightarrow I$ (operatore identico); K

IV. se $g(\lambda, \alpha)$ è analitica rispetto ad α, l'espressione $g(K, \alpha)f$ è analitica rispetto ad α, nel senso che è un funzionale analitico di $g(\lambda)$.

Osservato allora che, fissata la funzione $f \varepsilon H$ e la x, il valore f_1 dell'espressione $f_1(x) = g(K)f$, è un funzionale puro F di $g(\lambda)$ — che caratterizza in sostanza l'omomorfismo Θ — dalle quattro proprietà dette, discende, tra l'altro, che tale funzionale F dev'essere *analitico e lineare,* e quindi Φ una regione lineare (A). Pertanto il problema di valutare l'espressione $g(K)f$, con $g(\lambda) \varepsilon \Phi$, è ridotto a quello del calcolo del valore del funzionale analitico lineare $F[g(\lambda)]$, e risolto per mezzo della formula (1). In conseguenza, l'ipotesi dell'esistenza della Θ porta alla possibilità di risolvere ogni equazione funzionale della forma $g(K)f = y$ non appena nel campo Θ esiste la funzione $1/g(\lambda)$.

D'altra parte partendo da un operatore lineare K di un campo funzionale H, presa come definizione di $g(K)f$ l'espressione precedentemente trovata si riconosce che, soddisfatte certe condizioni, rimane stabilito un omomorfismo $\Theta: g(\lambda) \longrightarrow g(K)$, che gode proprio delle quattro proprietà dette e quindi rimane anche fondato un calcolo rigoroso delle funzioni $g(K)$.

Come esempio è sviluppato il calcolo delle funzioni $g(\mathfrak{J})$ dell'operatore $\mathfrak{J}$: $\mathfrak{J}f = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$; calcolo che è poi esteso a espressioni del tipo $h(\mathfrak{J}, x)f$. Ne viene fatta applicazione alla risoluzione di equazioni funzionali lineari di tipo molto generale, in particolare alle equazioni differenziali a derivate parziali, in due variabili, del 2° ordine di tipo iperbolico, con i coèfficienti funzioni di una sola delle variabili, o di tipo parabolico a coefficienti costanti e con le condizioni iniziali assegnate anche su una curva qualunque.

Vengono poi date ulteriori notevoli estensioni di questo calcolo operatorio; così a mezzo della teoria dei funzionali analitici delle funzioni di n variabili, (della quale sono dati i risultati fondamentali) il calcolo simbolico in questione viene esteso a quello delle funzioni di n operatori lineari e permutabili di un certo campo, e sono esposte estesamente interessanti applicazioni di tale calcolo.

Viene mostrato, tra l'altro, come, per mezzo della notevole formazione che l'A. chiama prodotto funzionale proiettivo, sia possibile ottenere sempre, in forma finita, la soluzione di una qualunque equazione differenziale a derivate parziali, lineare, a coefficienti costanti, di ordine qualunque, in un numero qualunque di variabili, con le condizioni inziali di Cauchy. Dalle formule risolutive emerge in modo suggestivo la struttura intima della soluzione. Come esempio è portato infine l'espressione risolutiva di una equazione alle derivate parziali del 3º ordine in tre variabili, a cono caratteristico razionale, le cui sezioni piane sono cardioidi, con i dati inziali nulli su un iperpiano, nel qual caso gli integrali abeliani da calcolare (relativi sempre al cono caratteristico che è razionale) risultano esprimibili mediante funzioni elementari.

L'opera riesce certamente una guida efficace per chi vuole avere una idea d'insieme della teoria dei funzionali analitici e delle sue applicazioni. Per i dettagli delle dimostrazioni e per maggiori sviluppi si rimanda ai lavori indicati nella bibliografia annessa.

L'argomento trattato dal prof. E. R. LORCH nel suo corso intitolato « *Anelli normati* » riguarda la teoria degli ideali negli anelli normati, dovuta essenzialmente a I. GELFAND (1941): si tratta di una teoria di interesse ed attualità; da essa per esempio ha ricevuto un indirizzo nuovo e fecondo l'analisi armonica astratta (v. in proposito il recente volume: L. H. LOOMIS, *Abstract harmonic analysis*, Van Nostrand, New York, 1953).

Nel principio del corso vengono concisamente richamate le nozioni fondamentali sugli spazi di BANACH e i loro duali, in particolare si accenna alla cosidetta *topologia debole, la cui considerazione è fondamentale in varie questioni.

Si dà quindi il concetto di anello normato (M. NAGUMO, 1936), che è un insieme di elementi dotato della struttura algebrica di anello e della struttura topologica di spazio di BANACH, tali due strutture essendo legate dalla relazione $\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$. Vengono poi accennate alcune proprietà fondamentali, necessarie per il seguito. Gli anelli che vengono considerati sono sempre supposti commutativi e dotati di elemento unità.

Introdotta la nozione di ideale, si prova l'esistenza di ideali massimi, e si dimostra che l'anello quoziente di un anello normato rispetto ad un solo ideale chiuso è ancora un anello normato. Viene quindi studiata l'intersezione di tutti gli ideali massimi dell'anello, la quale, se non si riduce al solo elemento zero, è un ideale chiuso, detto il radicale dell'anello; esso gode di interessanti proprietà ed ha importanti relazioni con la struttura dell'anello (GELFAND, 1941; LORCH, 1942). Vengono poi studiati gli omomorfismi di un anello normato sui numeri complessi, dimostrando la compattezza del loro insieme nella *topologia debole, nonchè la corrispondenza biunivoca fra essi e gli ideali massimi dell'anello (che sono i nuclei di quegli omomorfismi). Sono questi i risultati centrali esposti nel corso. Mediante essi si mostra come qualsiasi anello normato astratto può rappresentarsi in un anello di funzioni continue in uno spazio compatto, e come ogni anello normato di funzioni su un insieme qualunque può applicarsi isometricamente *sull'*anello delle funzioni continue in un opportuno spazio compatto. In tutto ciò giuoca in modo essenziale la *topologia debole.

La brevità del corso non ha consentito di sviluppare applicazioni della teoria svolta; tuttavia non mancano cenni anche su questo, specialmente riguardo alle serie trigonometriche assolutamente convergenti. Com'è noto, N. WIENER (1932, 1938), R. H. CAMERON (1937) e R. H. PITT (1938) hanno dimostrato su tale argomento alcuni teoremi molto interessanti, che possiedono essenziali applicazioni in teoremi di tipo tauberiano; la teoria degli anelli normati fornisce (come ha mostrato I. GELFAND, 1941) un metodo generale di deduzione di tali teoremi, e permette la dimostrazione di una serie di teoremi più generali. Nel corso purtroppo non si è potuto indicare tutto questo: l'A. si è limitato a dare, come esempio, un'elegante dimostrazione di un noto teorema di WIENER.

La teoria è delineata con chiarezza, e nella sua esposizione è contenuto tutto quanto occorre per la comprensione: le poche volte in cui è necessario riferirsi a risultati di altre teorie, i riferimenti bibliografici dànno indicazioni precise.

Nella conferenza del prof. M. CUGIANI: « *Cenni sulla teoria delle distribuzioni* », sono brevemente ricordate le nozioni e le definizioni fondamentali della teoria delle distribuzioni di SCHWARTZ. È trattato poi il problema del cambiamento di variabili in una distribuzione, problema che ha applicazioni anche in fisica e che è stato oggetto di ricerche dell'A. insieme con S. ALBERTONI La bibliografia rimanda appunto, oltre che al noto libro di L. SCHWARTZ, a due note degli AA. sul detto argomento. (Cfr. « Nuovo Cimento », 1951 e 1953).

Infine, nella conferenza « *Teoria delle funzioni monogene nelle algebre complesse comutative, dotate di modulo* » del Prof. G. B. RIZZA, è richiamata l'attenzione su un fecondo indirizzo di questa teoria, la quale, sviluppata in modo invariante rispetto agli isomorfismi dell'algebra considerata, è ormai completata nelle sue linee fondamentali, in gran parte per i contributi personali dell'A. Sono qui soprattutto esposti, in rapida sintesi, i risultati dell'A. che riguardano la determinazione di una formula integrale unidimensionale di tipo Cauchy per dette funzioni. Per i dettagli e gli ulteriori sviluppi si rimanda ai lavori originali apparsi sui « Rendiconti » dell'Università di Roma del 1952 e 1953.

FRANCESCO SUCCI

A. J. CHINTSCHIN, *Drei Perlen der Zahlentheorie*, Akademie Verlag, Berlin (1951), Traduzione dal russo a cura di W. v. Klemm, pagine 62.

Nella teoria dei numeri si incontrano spesso dei problemi dall'enunciato semplicissimo, tanto che in certi casi il loro contenuto può essere facilmente afferrato anche da uno scolaro dei primi anni, ma che riescono poi difficilissimi da trattare, così che hanno potuto essere risolti solo con l'aiuto di strumenti analitici assai elevati, o sono rimasti tuttora insoluti dopo secoli di generosi tentativi.

Questo fatto è a tutti ben noto ed è inutile ricordare qui i famosissimi esempi che a questo proposito subito si affacciano alla mente. Vogliamo piuttosto rilevare come esso spieghi in gran parte un certo atteggiamento che in questo tipo di ricerche si è venuto creando, per il quale, accanto alla ovvia aspirazione a raggiungere risultati nuovi con tutti i mezzi disponibili, si è affermata una certa esigenza di « elementarizzare » i procedimenti dimostrativi dei risultati già acquisiti, ed in generale di difondere tutta la teoria su basi più elementari, là dove almeno la natura delle proposizioni sembra consentirlo.

Va notato che questa tendenza è stata incoraggiata dal fatto che negli ultimi quarant'anni alcune geniali idee di carattere « elementare » hanno dato l'avvio a nuovi e fecondi indirizzi di ricerca.

Tutto ciò spiega l'ordine di idee in cui si è posto l'autore scrivendo questo libretto, il cui scopo sembra essere stato quello di illustrare l'efficacia di tali metodi elementari, di tipo piuttosto moderno, e di far gustare la chiarezza e l'eleganza con cui grazie ad essi si possono trattare alcuni problemi di aritmetica non facili, nonostante il loro aspetto a prima vista modesto. Il tutto è stato fatto con un tono volutamente assai piano, in modo da rendere la lettura agevole ad una larghissima cerchia di cultori di matematica.

Scopo dunque didattico, in certo senso direi divulgativo; scopo che ci sembra, grazie alla felice scelta degli argomenti e al tono indovinato dell'esposizione, egregiamente raggiunto.

Nei tre capitoli di cui il libro consiste, vengono trattate tre proposizioni piuttosto note della teoria dei numeri; la terza anzi costituisce un risultato che ben si può chiamare classico. Di ciascuna di esse l'autore espone, oltre ad una breve illustrazione storica, una dimostrazione piuttosto recente; condotta nello spirito di quei metodi elementari.

Nel primo capitolo si tratta di un elegante teorema di Van der Waerden sulle progressioni aritmetiche di cui ecco qui l'enunciato:
fissati due numeri naturali $k \geq 2$, $l \geq 2$, è possibile trovare in conseguenza un numero naturale n tale che, scelto comunque un insieme di n numeri naturali consecutivi e divisolo con una legge qualunque in k sottoinsiemi, in almeno uno di tali sottoinsiemi sia contenuta una progressione aritmetica di almeno l elementi.

La dimostrazione originale di Van der Waerden era sì elementare, ma piuttosto laboriosa. L'autore preferisce esporne una più recente di M. A. Lukomskaja. Partendo dalla ovvia osservazione che per $l = 2$ il teorema è verificato qualunque sia k, assumendo $n = k + 1$, si procede poi per induzione da l ad $l + 1$; in questo passaggio consiste la vera difficoltà della dimostrazione.

Nel secondo capitolo si incontra anzitutto una parte introduttiva sul concetto di densità di una successione. La densità $d(A)$ di una successione A del tipo: $0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ è definita come l'estremo inferiore dei valori assunti per $n \geq 1$ dall'espressione: $A(n)/n$ (dove $A(n)$ è il numero degli elementi non nulli di A che non superano n). La successione è supposta strettamente crescente a elementi interi, di modo che: $0 \leq d(A) \leq 1$.

Si ricordano alcune notevoli applicazioni del concetto di densità e delle sue proprietà, sottolineando in particolare come, grazie ad esso, Schnirelmann abbia potuto fornire la ben nota risoluzione parziale del classico problema di Goldbach. Si richiama fra l'altro la facile dimostrazione della disuguaglianza:

$$d(A + B) \geq d(A) + d(B) - d(A) \cdot d(B) \tag{1}$$

cui soddisfano le densità $d(A)$ e $d(B)$ di due successioni A e B e la densità $d(A + B)$ della successione *somma* (nella quale figurano le somme di ciascun elemento di A con ciascun elemento di B), e si dimostra anche il teorema fondamentale che: *ogni successione A di densità positiva è una base della successione dei numeri naturali* (vale a dire che iterando la *somma* $A + A + A \ldots$ un numero conveniente di volte si ottiene tutta la successione dei numeri naturali).

Si fissa infine l'attenzione sulla disuguaglianza:

$$d(A + B) \geq d(A) + d(B) \tag{2}$$

(qui si suppone $d(A)+d(B)\leq 1$, in caso contrario la (2) diverrà $d(A+B)=1$) la cui validità era stata oggetto di una ipotesi formulata da Landau e Schnirelmann nel 1931 e fu dimostrata da Mann nel 1942, con metodi elementari.

Di questo teorema di Mann l'autore presenta una successiva dimostrazione di Artin e Sherk, la quale, nonostante sia ancora notevolmente complessa, costituisce già un progresso, in fatto di semplicità, rispetto a quella di Mann.

Nel terzo capitolo si tratta del classico problema di Waring intorno alla possibilità di rappresentare un numero naturale qualunque come somma di al più $g(k)$, potenze k-esime di numeri naturali, con $g(k)$ dipendente solo da k. Il problema fu risolto, com'è noto, da Hilbert, almeno nel senso di garantire l'esistenza di un $g(k)$ per ogni k.

Qui l'autore espone una nuova dimostrazione del teorema di Hilbert, dovuta a J. W. Linnik. Questa dimostrazione di cui l'autore avverte opportunamente che è « elementare », ma non « semplice », occupa praticamente tutto il capitolo; in essa trovano essenziale applicazione le idee di Schnirelmann esposte all'inzio del precedente capitolo. Il nocciolo della dimostrazione consiste infatti nel far vedere che la successione *somma* di un numero abbastanza grande (in dipendenza di k soltanto) di successioni come questa:

$$0,\ 1^k,\ 2^k,\ 3^k, \ldots,\ n^k, \ldots$$

ha densità positiva e pertanto può costituire una *base* della successione dei numeri naturali.

MARCO CUGIANI

HELMUT HASSE, *Über die Klassenzahl abelscher Zahlkörper*, Akademie Verlag, Berlin (1952), pagine xii + 190.

La determinazione del numero delle classi di ideali equivalenti nei corpi algebrici è uno fra i problemi classici della teoria dei numeri, entrati nella tradizione come « non facili », la cui trattazione ha richiesto in generale l'uso di strumenti analitici non elementari, in contrasto colla natura elementare della questione. Esso ha costituito in particolare uno dei più forti incentivi alla elaborazione della teoria delle serie di Dirichlet.

Presentatosi dapprima come problema di determinare il numero delle classi di forme binarie quadratiche equivalenti, ebbe già ad interessare lo stesso Gauss, e fu sostanzialmente risolto, in questo aspetto limitato, dal Dirichlet, colle sue celebri ricerche di aritmetica analitica.

Il problema, così posto, è equivalente a quello di determinare il numero delle classi di ideali nei corpi quadratici.

Analogo problema venne trattato dal Kummer per i corpi circolari.

Impostato in seguito nella sua forma più generale esso costituì oggetto di ricerche, per le quali vien fatto di ricordare soprattutto il nome di Dedekind; a lui si deve sostanzialmente la nota formula, valida in un corpo qualunque:

$$h = \frac{1}{g} \cdot A_k \tag{1}$$

dove h è il numero delle classi, g è una costante propria del corpo, A_k è il residuo nel punto $s=1$ della nota funzione di Dedekind $\zeta_k(s)$ che generalizza ad un corpo algebrico qualunque la $\zeta(s)$ di Riemann $(\zeta_k(s) = \Sigma\, NA)^s$, la sommatoria è estesa a tutti gli ideali del corpo, NA è la norma dell'ideale A). Ricordiamo che per il valore di g si ottiene:

$$g = \frac{2^{n_0}\pi^{n-n_0}R}{w\sqrt{|d|}}$$

dove n è il grado del corpo; n_0 è il numero complessivo dei corpi coniugati reali e delle coppie di corpi coniugati immaginari; R è il regolatore del corpo (valore assoluto del determinante formato con $(n_0 - 1)$ logaritmi coniugati di un sistema fondamentale di unità); w è il numero delle radici dell'unità appartenenti al corpo e infine d è il discriminante del corpo.

La (1) si presta male alla effettiva valutazione del numero delle classi di un assegnato corpo algebrico. Se si eccettua il caso dei corpi quadratici per i quali si possono assegnare dei procedimenti, in parte già contenuti nelle ricordate ricerche di Dirichlet ed in parte sviluppati successivamente, che permettono di trasformare la (1) in modo da renderla adatta a valutazioni numeriche, l'impiego di tale formula, sia pure nelle varie forme di cui essa è notoriamente suscettibile, conduce in pochi casi a risultati soddisfacenti.

Nella presente opera l'autore si è proposto di fornire, nel caso di corpi abeliani assoluti (cioè abeliani sul corpo dei numeri razionali), un complesso di notizie, che mentre ci dànno una più approfondita e organica conoscenza di tali corpi, creano strumenti sufficientemente maneggevoli per condurre alla effettiva valutazione numerica.

La ricerca è notevolissima in sè per il numero e l'importanza delle proposizioni originali a cui conduce e per l'effetto di sintesi che realizza, ed il pregio del libro è aumentato dal fatto che l'autore spesso ha occasione di toccare interessanti argomenti di carattere generale, algebrico o aritmetico, portando anche qui rilevanti contributi originali.

La trattazione è caratterizzata da un largo impiego della teoria dei corpi di classi, che ha una funzione essenziale nella maggior parte dello svolgimento del lavoro.

Nel primo capitolo l'autore espone una serie di considerazioni generali.

Sia $\boldsymbol{K}$ un corpo abeliano, di grado n, e discriminante d, e sia $\boldsymbol{K}_0$ il suo massimo sottocorpo reale, h ed h_0 rispettivamente i numeri delle classi di $\boldsymbol{K}$ e di $\boldsymbol{K}_0$. Il quoziente $h^* = h/h_0$ verrà chiamato il numero di classi relativo di $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{K}_0$.

A $\boldsymbol{K}$ è coordinato un gruppo H di classi di numeri congrui, di conduttore f.

Per il ben noto teorema di Kronecker-Weber $\boldsymbol{K}$ è un sottocorpo del corpo circolare generato da una radice primitiva f-esima dell'unità. Siano χ i caratteri mod H ed $f(\chi)$ i loro conduttori; risulterà f il minimo comune multiplo degli $f(\chi)$ e $|d|$ il loro prodotto. I χ si diranno i caratteri di $\boldsymbol{K}$.

Fra i caratteri χ ve ne saranno alcuni, indicati con χ_0, che sono caratteri di $\boldsymbol{K}_0$, per i quali risulta $\chi_0(-1) = +1$; gli altri, indicati con χ_1, saranno chiamati caratteri di $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{K}_0$; per essi risulterà $\chi(-1) = -1$.

Partendo sostanzialmente dalla (1) l'autore giunge alle formule:

$$a) \qquad h_0 = \frac{\prod\limits_{\chi_0 \neq 1} \sum\limits_{\pm x \bmod f(\chi_0)} \left(-\chi_0(x) \log \left| 1 - \zeta^x_{f(\chi_0)} \right|\right)}{R_0}$$

$$b) \qquad h^* = Qw \cdot \prod_{\chi_1} \frac{1}{2 \cdot f(\chi_1)} \sum^{+}_{x \bmod f(\chi_1)} (-\chi_1(x) \cdot x)$$

dove ζ_a è la radice a-esima dell'unità di minimo argomento positivo ed R_0

è il regolatore di K_0. La sommatoria $\sum_{\pm x \bmod a}$ si intende estesa ai numeri interi x tali che: $(x, a) = 1$; $0 < x < a/2$; la sommatoria $\sum^{+}_{x \bmod a}$ si intende estesa agli interi x tali che: $(x, a) = 1$, $0 < x < a$. Q è l'indice del sottogruppo delle unità di K_0 e dei loro prodotti colle radici dell'unità contenute in K nel gruppo di tutte le unità di K.

Per i corpi abeliani reali si ha $h = h_0$.

Nel secondo capitolo si tratta dei corpi reali e si ragiona quindi sulla struttura aritmetica della formula a).

Fondamentale è qui l'introduzione di certi fattori numerici che, moltiplicati per hR, forniscano espressioni adatte a particolari valutazioni. Vediamo ad esempio il fattore g_k, così definito:

$$g_k = \prod_{p \mid f} \prod_{\chi \neq 1} (1 - \chi(p))$$

g_k risulta uguale a zero solo quando un numero primo $p \mid f$ si decompone, in K, in un prodotto di ideali primi diversi. Se ciò non avviene, per ogni $p \mid f$ sarà: $p \backsim P^{\frac{n}{n_p}}$, e risulterà: $g_k = \prod_{p \mid d} n_p$.

L'ufficio del fattore g_k si riconosce dal fatto che ora il prodotto $g_k \cdot h \cdot R$ risulterà uguale al regolatore del sistema di certe speciali unità del corpo, che vengono denominate *unità circolari*. Di qui scaturiscono certe relazioni che permetteranno di dare una valutazione aritmeticamente più significativa del numero h, almeno per certe classi di corpi abeliani; la cosa riesce bene in particolare per alcune famiglie di corpi circolari.

Si richiama poi un noto teorema di Weber sui corpi circolari delle radici 2^{ρ}-esime della unità, il cui massimo sottocorpo reale ha sempre un numero dispari di classi. Questo teorema viene qui approfondito ed insieme ad ulteriori considerazioni, porterà ad una seconda rappresentazione aritmetica del numero h, legata ad un nuovo fattore numerico, grazie alla quale viene data una soluzione soddisfacente al problema, almeno per i corpi circolari.

Nel terzo ed ultimo capitolo si tratta dei corpi immaginari e quindi interessa ora particolarmente la struttura aritmetica della b).

Dopo aver fornito una dimostrazione indiretta, fondata sulla teoria dei corpi di classi, che il numero h^* risulta in ogni caso intero, l'autore passa ad esaminare il fattore Q dimostrando che esso può assumere soltanto uno dei due valori: 1 oppure 2.

Criteri minuziosi sono dati per la distinzione dei due casi. Per dare un'idea di questi risultati accenneremo ad esempio al seguente: *se K è un corpo immaginario di conduttore $f = p^s$, con p primo, allora $Q = 1$.*

L'autore si propone poi di dimostrare di nuovo che il numero h^* è intero ragionando adesso direttamente sulla b) o meglio su un'altra formula che dalla b) si deduce quasi immediatamente. Ciò gli dà occasione di fare numerosissime osservazioni sul comportamento dei caratteri nei vari casi possibili (a secondo della composizione del conduttore), dalle quali scaturiscono notizie particolarmente utili per l'effettivo calcolo numerico.

Viene poi ripreso il teorema di Weber, per ciò che si riferisce ad h^* (che risulta dispari anch'esso); se ne dà una estensione ai corpi circolari delle radici di ordine 3^{ρ} (per cui risulta h^* non divisibile per 3) con altre considerazioni e se ne fanno immediate ed ampie applicazioni numeriche.

da solo quasi i due terzi del volume, ricorderemo: notizie e proposizioni varie sulla divisibilità che possono presentare i numeri h ed h^* di un corpo rispetto a quelli di un suo sottocorpo, ed infine una serie di considerazioni e di proposizioni notevoli relative ai corpi con numero dispari di classi.

L'opera è conclusa da un gruppo di tavole numeriche e grafiche, intese sostanzialmente a fornire e a illustrare gli elementi per il calcolo del numero h^* per corpi i cui conduttori non siano superiori a 100.

MARCO CUGIANI

RICHARD G. COOKE, *Linear Operators - Spectral Theory and some other applications*, XI + 454, McMillan, London, 1953, 52 s., 6 d.

L'A., che nel 1950 aveva pubblicato « *Infinite Matrices and Sequence Spaces* », ha redatto questo nuovo volume dedicandolo principalmente sia ai giovani iscritti ai secondi bienni di studi universitari, sia agli studiosi di meccanica quantistica.

Alcune delle teorie più importanti sono esposte diffusamente: così del teorema fondamentale sull'analisi spettrale degli operatori autoaggiunti non limitati sono date alcune delle più recenti dimostrazioni e indicate la linee principali delle altre.

Il volume, stampato con la consueta perfezione dalla Casa Editrice MacMillan, è suddiviso in sette capitoli, ai quali fanno seguito una lunga e aggiornata bibliografia e l'indice.

Il Cap. I verte sullo spazio funzionale di HILBERT e sullo spazio astratto di HILBERT, presentato questo col metodo assiomatico di J. v. NEUMANN.

Il Cap. II contiene uno schizzo della teoria delle matrici infinite in relazione ai problemi di HEISENBERG della fisica teorica e un cenno sugli operatori lineari di cui trattano poi diffusamente i Capitoli III, IV, V.

Il Cap. III sugli operatori lineari nello spazio di HILBERT considera gli operatori aggiunti, gli operatori unitari, gli operatori limitati, l'indice di deficienza, e prepara al Cap. IV sulla teoria spettrale di v. NEUMANN (1929), nel quale, pel caso degli operatori hermitiani della meccanica quantistica, sono posti in rilievo lo spettro puntuale e lo spettro continuo.

Nel Cap. V, dopo una premessa sulle varie teorie spettrali elaborate successivamente da v. NEUMANN, l'A. dà i concetti di spettro puntuale, di spettro continuo e di spettro residuo di M. H. STONE, e successivamente un'ampia esposizione della teoria di B. A. LENGYEL come estensione del metodo di E. HELLINGER, della teoria di J. L. B. COOPER basata sulla nozione di funzione definita positiva di S. BOCHNER, della teoria di F. RIESZ ed E. R. LORCH e della teoria di B. A. LENGYEL e M. H. STONE per gli operatori limitati.

Ai precedenti Capitoli, di particolare interesse per gli studiosi di meccanica quantistica segue un Capitolo, il VI, sulla convergenza proiettiva e sui limiti negli spazi di matrici e negli anelli di matrici, con i recenti risultati di G. KÖTHE e O. TOEPLITZ, A. WEBER e H. S. ALLEN. Questo capitolo è collegato al ricordato volume « *Infinite Matrices...* ».

Il Cap. VII sull'Algebra topologica di BANACH, con alcuni teoremi di

S. BOCHNER sulle funzioni definitive positive, e con alcuni risultati di N. WIENER sulla convergenza assoluta delle serie trigonometriche e degli integrali, e col teorema di chiusura delle traslazioni, mira, come dice l'A., a creare un legame tra l'Algebra astratta e l'Analisi.

L'A. ha raggiunto lo scopo di dare una buona guida ai giovani matematici e un'utile informazione ai fisici teorici che negli operatori lineari trovano un efficace strumento di rappresentazione dei fenomeni quantistici.

GIOVANNI SANSONE

PAUL LÉVY, *Théorie de l'addition des variables aléatories,* (Fasc. I della collezione « Monographies des Probabilités » diretta da E. Borel), Seconda edizione, Gauthier-Villars, Paris, 1954. (Prima edizione : 1937).

Nella « Avvertenza » alla seconda edizione, l'A. indica chiaramente le varianti rispetto alla prima e i motivi per cui sono state contenute al massimo: ragioni pratiche (riproduzione fotografica dalla prima edizione), ma soprattutto sostanziali: pensare di « aggiornare » gli argomenti ivi trattati adeguandoli allo sviluppo avuto nel seguito avrebbe significato press'a poco scrivere un volume per ogni capitolo. E volumi del genere esitono, sia ad opera dello stesso Lévy (Processus stochastiques et mouvement brownien, 1948; Random functions, Un. Calif., 1953) che di altri Autori.

L'interesse attuale del volume che ora riappare, sta invece proprio nella sintesi sistematica che esso diede, al momento stesso in cui ciò apparve possibile, di quell'insieme di ricerche (dovute in gran parte a lui stesso, oltre che a Kolmogoroff, Khintchine, Cramèr, Feller, ecc.) che ha aperto la più recente fase di espansione del calcolo delle probabilità (direttamente derivante dalla precedente, sintetizzabile nei nomi di Borel, Cantelli, Fréchet). È per ciò che il volume appare ancor oggi la lettura più adatta per chi voglia accostarsi al nuovo campo di problemi, senza avere già quella preparazione specifica che è spesso presupposta in altre trattazioni; tale caratteristica è ulteriormente perfezionata dai sia pur limitati ritocchi alla 2ª edizione, che in un capitolo riordinano la sistemazione di risultati che nel 1937 erano appena conseguiti, in molti punti aggiungono con note in calce opportune indicazioni o chiarimenti (una, ad es., intesa a precisare il ruolo avuto dal Cantelli), ed infine, in due Note riportate come appendice, collegano l'esposizione con alcuni degli sviluppi più recenti. La Nota I, sulla legge debole e forte dei grandi numeri, espone ed amplia in forma sistematica e chiarificatrice gli studi attuali sull'argomento; la Nota II costituisce uno sguardo d'insieme sulla teoria dei processi stocastici, fatta con riferimento al recente volume di J. L. Doob (Stochastic Processes, Wiley, N. Y., 1953), e coll'intento precipuo di chiarire le ragioni per cui, all'impostazione del Doob che segue sempre l'ordine che egli riconosce essere il più logico, preferisca quella più intuitiva che parta dall'esame di casi particolari concreti e si preoccupi di questioni di « costruibilità » degli enti considerati.

Il contenuto dei nove capitoli del volume è il seguente. I primi quattro riassumono le nozioni classiche di calcolo delle probabilità che servono per il seguito, includendo la discussione di questioni concettuali importanti per l'impostazione del Lévy (come il fatto di basarsi su « partizioni »), e introducendo gli strumenti moderni che occorreranno (soprattutto, la funzione caratteristica, e cioè la trasformata di Fourier di una distribuzione). Il cap. V tratta della legge normale (o gaussiana) alla luce della congettura di Lévy dimostrata da Cramèr. Il VI si occupa del passaggio al numerabile e problemi che ne dipendono. Il VII presenta quei risultati sulla composizione di numeri aleatori che (insieme a quelli del V, che ne costituiscono un caso particolare) formano lo scopo essenziale del libro; l'VIII li estende — in quanto possibile — al caso di dipendenza, e il IX infine ne fa applicazione alla teoria delle frazioni continue.

BRUNO DE FINETTI