Paul Vincensini

Su una famiglia di reti geodetico-planari.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.1, p. 11–16.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_1_11_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Su una famiglia di reti geodetico-planari.

Nota di PAUL VINCENSINI (a Marseille)

Sunto. - *Il sunto è contenuto nel n. 1.*

1. Vorrei, nelle righe che seguono, attirare l'attenzione su una famiglia di reti coniugate di cui ho detto brevemente in una Nota recente dei *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences* (1), e che sono costituite da due sistemi di ∞^1 curve, le curve di uno dei quali sono piane, quelle dell'altro essendo geodetiche sulla superficie sostegno della rete.

Le evolventi dei sostegni di tali reti rispetto al loro sistema geodetico sono, come vedremo, trasformate di LIE di superficie le cui rigate *gobbe* asintotiche appartengono a complessi lineari, superficie di cui il Prof. L. GODEAUX ha parlato in una conferenza fatta l'anno scorso al *Seminario Matematico dell' Università di Torino* (2).

E siccome il problema della ricerca di queste ultime superficie non ha ancora, a mia conoscenza, avuto soluzione, non mi sembra fuor di proposito di farne conoscere alcune notevoli soluzioni particolari.

2. In una breve comunicazione al *Congresso di Amsterdam,* e poi in modo più ampio in una Memoria dei *Rendiconti del Seminario Matematico di Torino* (3), ho fatto uso della seguente corrispondenza fra le rette dell'E_3 metrico ordinario e i punti di un E_4 ambiente metrico, E_3 essendo ad esempio pensato come l'iperpiano $(Ox_1x_2x_3)$ del 4^{edro} ortogonale di riferimento in E_4.

Siano p_{ij} le coordinate pluckeriane di una retta D di E_3 [$-p_{14}$, $-p_{24}$, $-p_{34}$ essendo le componenti relative agli assi Ox_1, Ox_2, Ox_3 di un vettore da essa portato, e p_{23}, p_{31}, p_{12} quelle del momento del medesimo vettore rispetto agli stessi assi].

(1) PAUL VINCENSINI, *Sur les surfaces dont les règlées gauches asymptotiques d'un système appartiennent à des complexes linéaires,* « Comptes-rendus de l'Acad. des Sc. », t. 239, p. 113-114, 1954.

(2) LUCIEN GODEAUX, *Alcune osservazioni sulle congruenze W,* « Rendiconti del Seminario Matematico dell' Università di Torino », Vol. 13°, 1953-54.

(3) PAUL VINCENSINI, *Sur une représentation de l'espace euclidien E_3 dans E_4, et sur un nouvel aspect de la transformation de Sophus-Lie,* « Rend. del Sem. Mat. dell' Università di Torino », Vol. 13°, 1953-54. pp. 185-203.

A questa retta associamo il punto $M(x_1, x_2, x_3, x_4)$ di E_4 definito dalle

$$(1) \qquad \begin{aligned} &2p_{34}x_1 + (p_{14} + p_{23}) = 2p_{34}x_2 - i(p_{14} - p_{23}) = \\ &= 2p_{34}x_3 + (p_{24} + p_{31}) = 2p_{34}x_4 - i(p_{24} - p_{31}) = 0. \end{aligned}$$

Le (1) definiscono la corrispondenza cui si è fatto allusione sopra.

Questa corrispondenza, considerata in se stessa, sebbene non possa avere che limitate pretese all'originalità, si mostra molto utile in varie ricerche, e fornisce spesso confronti e riavvicinamenti, talvolta inaspettati, fra i due punti di vista proiettivo e metrico ([4]).

La corrispondenza (1) non è biunivoca senza eccezioni. Ad ogni retta appartenente al complesso ($p_{34} = 0$) delle parallele al piano (Ox_1x_2) essa fa corrispondere un punto dell'iperpiano all'infinito, che può essere un punto qualsiasi di questo iperpiano, e se il punto M di E_4 tende all'infinito in una direzione qualsiasi, la retta corrispondente di E_3 tende verso la retta all'infinito del piano Ox_1x_2 (caratterizzata da tutti i p_{ij} nulli salvo p_{12}).

Ci limiteremo qui a indicare, ciò che basta per il nostro scopo, che le (1) associano i complessi lineari di E_3 e le ipersfere (od iperpiani) di E_4, e che inoltre, a due rette incidenti di E_3 corrispondono due punti (le loro immagini) in E_4 giacenti su una stessa retta isotropa, ogni tale retta di E_4 essendo il sostegno delle immagini dei vari raggi di un fascio piano di rette di E_3.

Se dunque una qualsiasi superficie S di E_3 è pensata come determinata dal complesso delle sue ∞^3 rette tangenti, le (1) fanno corrispondere a queste ∞^3 rette, ∞^3 punti di E_4 distribuiti su ∞^2 rette isotrope. E siccome due fasci di rette tangenti ad S in due punti infinitamente prossimi hanno un raggio comune, le ∞^2 rette isotrope di cui sopra sono distribuite secondo due famiglie di ∞^1 sviluppabili (ogni sviluppabile essendo l'immagine di una asintotica di S), e costituiscono perciò una *congruenza isotropa* (I) immagine di S nell'E_4.

I due fuochi (F_1, F_2) su un raggio qualunque I di (I) sono le immagini di due tangenti asintotiche di S (uscenti dal centro M del fascio di E_3 relativo al raggio I di E_4). Inoltre, le immagini di due tangenti coniugate di tale fascio sono due punti di I coniugati armonici rispetto ad F_1 e F_2.

([4]) PAUL VINCENSINI, *Sur une traduction métrique de l'existence des quadrique de Lie d'une surface*, « Comptes-rendus de l'Acad. des Sciences », 31 Janvrier 1955, t. 240, p. 481-483

Le congruenze isotrope di uno spazio metrico euclideo ad un numero qualsiasi di dimensioni, godono di una notevole proprietà messa in luce dal GUICHARD ([5]), su cui dovremo poggiare nel seguito, e che consiste in ciò che le sviluppabili segnano, su qualunque iperpiano, le linee di curvatura della superficie intersezione dell'iperpiano e della congruenza.

Così, se S_1 è la superficie intersezione della congruenza isotropa (I) di E_4 (immagine della superficie S dell'E_3 di cui abbiamo parlato prima) con E_3 stesso, le sviluppabili di (I) segnano su S_1 il sistema delle linee di curvatura, ed è pure dovuta a GUICHARD l'osservazione che i raggi di (I) si proiettano su E_3 mediante le normali di S_1, i fuochi di (I) proiettandosi nei centri principali di curvatura di S_1.

E poiché le sviluppabili di (I) sono le immagini delle asintotiche di S, viene così stabilita fra S e S_1 una corrispondenza che, come è subito visto, non è altro che una trasformazione (L) di SOPHUS-LIE.

Attraverso quest'ultima trasformazione, molti problemi di geometria differenziale concernenti proprietà relative ad una superficie S di E_3, vengono trasformati in problemi relativi a proprietà del tutto differenti concernenti la superficie S_1 trasformata di LIE di S. E ci proponiamo ora precisamente di applicare queste considerazioni al problema della ricerca delle superficie S le cui rigate gobbe atintotiche di una stessa famiglia appartengono a complessi lineari, e del quale si è parlato alla fine del n. 1.

3. Siano (u, v) le asintotiche della superficie S, e supponiamo che le rigate gobbe generate dalle tangenti alle asintotiche u (variabile) nei vari punti di una qualsiasi asintotica v, appartengano a complessi lineari.

Chiamiamo F_1, F_2 i fuochi, sul raggio I della congruenza isotropa (I) [immagine di S in E_4] che corrisponde al punto generico M di S. Al variare di u e v, F_1 e F_2 descrivono le due falde focali (F_1) e (F_2) di (I), e supporremo che (F_1) sia la falda su cui le (u) sono spigoli di regresso di una famiglia di sviluppabili di (I).

Quando si mantiene (u) fisso e si fa variare (v), il punto F_1 descrive una curva v su F_1, e questa curva è l'immagine, in E_4, della rigata gobba [che diremo (v)] generata dalle tangenti alle asintotiche u nei punti ove queste asintotiche tagliano l'asintotica v considerata.

([5]) *Sur les systèmes orthogonaux et le systèmes cycliques*, « Ann. de l'Ecole Norm. Sup. », 1891.

Per quanto si è detto nel n. 2, S avrà le sue rigate gobbe asintotiche (v) in complessi lineari *se le curve* (v) *di* (F_1) *loro immagini in* E_4 *sono ipersferiche od iperpiane.*

Ora, per ottenere la famiglia di soluzioni del problema delle superficie con un sistema di rigate gobbe asintotiche in complessi lineari cui si è accennato nel n. 1, basta limitarsi al caso in cui *le* (v) *su* (F_1) *sono iperpiane, gli* ∞^1 *iperpiani di* E_4 *cui esse appartengono essendo ortogonali all'* E_3 *ordinario.*

Sia φ_1 la proiezione ortogonale del fuoco F_1 di I su E_3. Come si è detto al n. 2 la proiezione ortogonale di I su E_3 è la normale alla superficie S_1 (trasformata di Lie di S) traccia di (I) su E_3, nel punto P ove I segna E_3. E inoltre φ_1 è centro principale di curvatura di S_1 sulla falda (φ_1) [proiezione di (F_1)] della sua evoluta.

Su (φ_1) le curve u e v tracciano un sistema coniugato [proiezione del sistema coniugato (u, v) di (F_1)]. Le curve u di questo sistema di (φ_1) (spigoli di regresso della congruenza delle sue normali) sono *geodetiche*, e le curve v, intersezioni di E_3 con gli iperpiani proiettanti le v di (F_1) sono tutte *piane.*

(φ_1) gode dunque della proprietà *di ammettere un sistema coniugato* (u, v) *formato di curve* u *geodetiche e di curve* v *piane.*

Ogni superficie (Σ) sostegno di un tal sistema coniugato dà, a meno di una proiettività, una superficie S con le rigate gobbe asintotiche (v) in complessi lineari, che si ottiene applicando la trasformazione inversa di Lie (la trasformazione diretta trasformando le rette in sfere) ad una evolvente qualsiasi di (Σ) rispetto alle geodetiche u.

Ed è ben chiaro che la trasformazione di Lie di cui si parla è la trasformazione di Lie la più generale, poiché se questa trasformazione varia, S va trasformata omograficamente.

4. La formulazione analitica del problema della ricerca delle superficie (Σ) può farsi nel modo seguente.

Nel caso più generale dove i piani delle v inviluppano una sviluppabile, si può prendere ad arbitrio lo spigolo di regresso C di questa sviluppabile. Nel piano osculatore generico di C riferito alla tangente $M\xi$ e alla normale principale $M\eta$, il profilo v di una (Σ) può essere definito dalle equazioni

$$\eta = f(v, u), \qquad \xi = v,$$

dove u è il valore dell'arco di spigolo di regresso nel punto M.

Se si esprime che le curve di (Σ) coniugate dei profili piani v sono geodetiche, si ottiene, come facilmente si vede, una equazione alle derivate parziali del terzo ordine cui deve soddisfare la $f(v, u)$. E questo mostra che la più generale superficie (Σ) [e perciò la famiglia corrispondente di superficie aventi le rigate gobbe asintotiche di un sistema in complessi lineari] dipende da cinque funzioni arbitrarie di un argomento ciascuna: le tre funzioni introdotte dall integrazione dell'equazione del terzo ordine soddisfatta dalla $f(v, u)$, e le due funzioni che definiscono lo spigolo di regresso C.

Lasciando da parte il problema, che però non sembra facile, della determinazione completa delle superficie (Σ) di cui si tratta, e che altri potranno studiare, vogliamo ora indicarne una famiglia abbastanza ampia di soluzioni, limitandoci al caso in cui i profili v giacciono in piani fra loro paralleli.

In questo caso le superficie corrispondenti, trasformate inverse di Lie di superficie a rigate gobbe asintotiche di un sistema appartenenti a complessi lineari (ved. n. 2), sono suscettibili di una interessante definizione geometrica.

Sia (Σ) una superficie le cui curve v siano linee di livello rispetto ad un piano fisso (π), mentre le coniugate u sono geodetiche su (Σ).

Siccome queste coniugate sono le curve di contatto di (Σ) con i vari cilindri circoscritti a (Σ) le cui generatrici sono parallele a (π), esse sono geodetiche non soltanto su (Σ) ma anche sui suddetti cilindri circoscritti, e perciò sono eliche tracciate su questi cilindri (intersecando sotto angolo costante, variabile con il cilindro, le loro generatrici).

Ne segue che nella rappresentazione sferica di una qualsiasi evolvente (E) di (Σ) rispetto alle geodetiche u, le immagini delle linee di curvatura u di (E) sono cerchi i cui piani sono ortogonali al piano fisso (π), ciò che mostra che (E) è una superficie *le cui linee di curvatura di un sistema sono piane e tracciate in piani paralleli a una retta fissa* [*ortogonale al piano* (π)],

Viceversa, se (E) è una qualsiasi superficie le cui linee di curvatura giacciono in piani paralleli a una retta fissa Δ, le curve v coniugate delle geodetiche u sulla falda focale corrispondente dell'evoluta di (E) sono, come si vede subito, curve piane i cui piani sono paralleli a un piano fisso (π) normale a Δ.

Per quanto si è visto nel n. 3, *le trasformate inverse di Lie* $[S = L^{-1}E]$ *delle superficie* (E) *qui sopra definite geometricamente, fanno parte della famiglia delle superficie le cui rigate gobbe asintotiche di un sistema appartengono a complessi lineari.* E le rigate gobbe in discorso sono formate dalle tangenti alle asintotiche della S trasformate L^{-1} delle linee di curvatura *piane* di (E) nei punti dove queste asintotiche segnano una medesima asintotica trasformata di una linea di curvatura dell'altro sistema della stessa (E).

Conviene fare osservare che la determinazione delle superficie (E), di cui si tratta sopra, si compie con sole quadrature, potendosi applicare alla loro ricerca il procedimento usato dal BIANCHI (6) per le superficie generali con un sistema di linee di curvatura piane, la cui determinazione può essere effettuata appunto con sole quadrature.

Una classe interessante di superficie (E) è costituita dalla superficie a linee di curvature piane *nei due sistemi*.

I piani delle linee di curvatura di queste superficie sono, come è ben noto, paralleli all'una o l'altra di due rette ortogonali fra loro, e ne segue che le $S = L^{-1}E$ attuali godono *doppiamente* della proprietà caratteristica delle superficie generali S. Per esse, *tanto le rigate formate dalle tangenti alle asintotiche di un sistema nei punti d'incontro con un'asintotica qualsiasi dell'altro*, *quanto le rigate analoghe ottenute permutando i due sistemi di asintotiche, appartengono a complessi lineari.*

Viene così messa in luce una soluzione (la cui generalità è quella di due funzioni arbitrarie di una variabile ciascuna) del problema della ricerca delle superficie le cui rigate gobbe asintotiche *appartengono tutte a complessi lineari*, problema che meriterebbe forse uno studio più accurato.

Fra le superficie in discorso vi sono *le superficie minime di O. Bonnet* a linee di curvatura piane nei due sistemi.

Ho mostrato, nel lavoro citato al n. 2 dei *Rend. del Sem. Mat. dell' Univ. di Torino,* che le superficie minime generali sono trasformate di LIE di superficie (di WILCZYNSKI) su cui esiste una rete coniugata le cui curve dell'uno e dell'altro sistema appartengono, rispettivamente, all'uno o all'altro di due complessi lineari fissi.

Le trasformate inverse di LIE delle superficie minime di O. BONNET hanno dunque un comportamento rispetto al complesso lineare che merita d'essere rilevato:

Esse hanno in complessi lineari, tanto le rigate gobbe asintotiche dell'uno e dell'altro sistema quanto le due famiglie di curve di una rete coniugata tracciata su esse.

(6) L. BIANCHI. *Lezioni di geometria differenziale*, 3ª ediz., t. I, p. 509.