Bollettino
Unione Matematica Italiana

Giovanni Ricci

Sulla partizione degli interi in addendi primi col procedimento del residuo minimo.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.1, p. 1–10.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_1_1_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

SEZIONE SCIENTIFICA

BREVI NOTE

Sulla partizione degli interi in addendi primi col procedimento del residuo minimo.

Nota di Giovanni Ricci (a Milano)

Sunto. - *Detto* p′ *il massimo intero primo* $\leq$ n, *si pone* n $=$ p′ $+$ n′; *detto* p″ *il massimo intero primo* $\leq$ n′ *si pone* n $=$ p′ $+$ p″ $+$ n″ *ecc. In questo modo si assegna univocamente « la partizione di* n *in addendi primi col procedimento del residuo minimo ». Si studia il numero degli addendi di questa partizione. Si dimostra che il numero degli interi* n *della forma* n $=$ p′ $+$ p″ *appartenenti all'intervallo* $(1-\delta)\xi < n \leq \xi$ *ha il « vero ordine di grandezza »* $\delta\xi/\ln\ln\xi$.

1. - Definizione e prime osservazioni.

Sia $p_1, p_2, p_3, \ldots$ la successione crescente degli interi assoluti primi; denotiamo con p il generico numero primo e con $\bar{p}$ (usando il sopra-segno) il numero primo successivo a p; con $\bar{p}'$ il numero primo successivo a p' ecc.

Sia n un intero assoluto maggiore di 1 e si scelga il massimo intero primo p' non superiore a n, cioè sia $p' \leq n < \bar{p}'$; allora è $n = p' + n' (n' \geq 0)$ (eventualmente $n = p'$, $n = p' + 1$). Se $n' > 1$ procediamo su n' come su n e otteniamo $n = p' + p'' + n''$ $(n'' \geq 0)$. Così continuando, poichè $n > n' > n'' > \ldots$ si perviene a un ultimo addendo (sia il k-esimo) che è 1 oppure $p^{(k)}$ primo. Allora poniamo (a seconda dei due casi possibili)

$$(1.1) \quad n = p' + p'' + \ldots + p^{(k-1)} + 1 \quad \text{oppure} \quad n = p' + p'' + \ldots + p^{(k-1)} + p^{(k)}.$$

La partizione di n così ottenuta in addendi primi (ed eventualmente come ultimo termine l'unità) si dirà *la partizione di* n *in addendi primi col procedimento del residuo minimo* e anche, abbreviando, *la partizione* ($\mathcal{S}$) *di* n.

La partizione ($\mathcal{S}$) dell'intero 1 si assume $1 = 1$,

E' evidente che ogni intero positivo ammette una e una sola partizione ($\mathcal{S}$).

Esempi

$1 = 1$	$6 = 5 + 1$	$27 = 23 + 3 + 1$
$2 = 2$	$7 = 7$	$100 = 97 + 3$
$3 = 3$	$8 = 7 + 1$	$300 = 293 + 7$
$4 = 3 + 1$	$9 = 7 + 2$	$1.000 = 997 + 3$
$5 = 5$	$10 = 7 + 3$	$10.000 = 9973 + 23 + 3 + 1.$

Denotiamo con $\mathcal{S}(k)$ la classe degli interi n la cui partizione ($\mathcal{S}$) consta di k addendi, cioè è del tipo (1.1); denotiamo con $\mathcal{S}(k, 1)$ e con $\mathcal{S}(k, p^{(k)})$ le classi degli interi n, contenuti in $\mathcal{S}(k)$, pei quali vale rispettivamente la prima o la seconda delle rappresentazioni (1.1): in questo modo si pone in evidenza il valore dell'ultimo termine della partizione. E' ovvio che $\mathcal{S}(1)$ è la classe degli interi $1, p_1, p_2, p_3, \dots$; le classi $\mathcal{S}(1, 1)$ e $\mathcal{S}(1, p')$ sono costituite di un solo elemento (1 o p').

La classe $\mathcal{S}(2, 1)$ è costituita da tutti e soli gli interi della forma $p + 1$. La classe $\mathcal{S}(2, q)$ (q primo) è costituita da tutti e soli gli interi della forma $n = p + q$ con $p + 1 < n < \bar{p}$. $\mathcal{S}(2, 1)$ e $\mathcal{S}(2, q)$ contengono infiniti elementi.

Per gli esempi sopra esposti abbiamo:

$$10 \in \mathcal{S}(2, 3), \quad 27 \in \mathcal{S}(3, 1), \quad 10.000 \in \mathcal{S}(4, 1) \quad \text{ecc.}$$

Come conseguenza immediata delle definizioni poste sussistono le seguenti proposizioni:

a) La partizione (1.1) è una partizione ($\mathcal{S}$) quando e soltanto quando per ogni $1 \leqq h \leqq k - 1$ è

$$p^{(h)} + p^{(h+1)} + \dots + \begin{cases} 1 \\ p^{(k)} \end{cases} < \bar{p}^{(h)}, \qquad (h = 1, \dots, k - 1).$$

b) Se $1 \leqq h_1 < h_2 < \dots < h_s \leqq k$ cioè se $(h_1, \dots, h_s)$ è una combinazione di $s (\leqq k)$ interi (in ordine crescente) scelti fra $1, 2, \dots, k$ allora

$$n' = p^{(h_1)} + p^{(h_2)} + \dots + p^{(h_s)}$$

(eventualmente $p^{(h_s)} = 1$) è una partizione ($\mathcal{S}$) di n'.

c) Se $p + n < \bar{p}$, allora dalla (1.1) si ottiene

$$n_1 = p + n = p + p' + \dots + p^{(k-1)} + 1 \quad (\text{oppure } + p^{(k)})$$

che è la partizione ($\mathfrak{S}$) dell'intero n_1. (Ampliamento iniziale della partiz. ($\mathfrak{S}$)).

d) Inserendo il termine p fra i due termini $p^{(i-1)}$ e $p^{(i)}$ della partizione ($\mathfrak{S}$) di un intero n, si ottiene la partizione ($\mathfrak{S}$) dell'intero $n_1 = n + p$ quando e soltanto quando sono verificate le i condizioni seguenti:

$$p^{(h)} + \dots + p^{(i-1)} + p + p^{(i)} + \dots + \begin{Bmatrix} 1 \\ p^{(k)} \end{Bmatrix} < \bar{p}^{(h)} \qquad (h = 1, 2, \dots, i-1)$$

$$p + p^{(i)} + \dots + \begin{Bmatrix} 1 \\ p^{(k)} \end{Bmatrix} < \bar{p}$$

(implicitamente risulta $p^{(i-1)} > p > p^{(i)}$).

Quando $i = 1$ si ricade in *c*).

e) Se $k \geqq 2$, ogni classe $\mathfrak{S}(k, 1)$, $\mathfrak{S}(k, p^{(k)})$ contiene infiniti elementi.

Infatti ogni intero $p_1 p_2 \dots p_m + l$, $(l = 2, 3, \dots, p_m)$, non è primo è quindi $\limsup (p_{n+1} - p_n) = +\infty$; assegnata una ($\mathfrak{S}$) si può effettuare in infiniti modi un ampliamento iniziale (vedi *c*)). Procedendo con tali successivi ampliamenti si perviene all'asserto.

f) Dalla proprietà nota $(p_{n+1} - p_n)/p_n \to 0$ segue $(n - p')/p' \to 0$ per $n \to +\infty$. La successione (finita) p', p'', ... decresce molto rapidamente.

2. - Il numero dei termini e l'elemento minimo.

Per ogni $n \in \mathfrak{S}\, k)$ poniamo $\varkappa(n) = k$; cioè $\varkappa(n) = k$ quando k è il numero dei termini della partizione ($\mathfrak{S}$) di n.

Denotiamo con μ_k l'intero minimo appartenente a $\mathfrak{S}(k)$ e con $\mu_k(1)$ e $\mu_k(p)$ l'intero minimo appartenente rispettivamente alle classi $\mathfrak{S}(k, 1)$ e $\mathfrak{S}(k, p)$ sottoclassi di $\mathfrak{S}(k)$.

Esempi: $\varkappa(1) = 1$, $\varkappa(p) = 1$, $\varkappa(p+1) = 2$ (quando $p > 2$), $\varkappa(4) = 2$, $\varkappa(27) = 3$, $\varkappa(1000) = 2$ ecc.

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 4, \quad \mu_3 = 27, \text{ ecc.}$$

$$\mu_2(2) = 9, \quad \mu_2(3) = 10, \quad \mu_3(1) = 27, \text{ ecc.}$$

Poichè esistono interi n con $\varkappa(n)$ arbitrariamente grande mentre è $\varkappa(p) = 1$ per ogni p, risulta

$$1 = \liminf \varkappa(n) < \limsup \varkappa(n) = +\infty.$$

Denotiamo con $q(m)$ il minimo intero primo q tale che $q < q + m < \bar{q}$, cioè se n è il minimo indice per cui $p_n + m < p_{n+1}$ si pone $q(m) = p_n$. Esempi $q(1) = 3$, $q(2) = q(3) = 7$, $q(4) = q(5) = 23$, $q(6) = q(7) = 83$, $q(8) = ... = q(13) = 113$, $q(14) = ... = q(17) = 523$ ecc.

a) La successione $\mu_1, \mu_2, \mu_3, ...$ è crescente: questo è immediata conseguenza del n. 1 *b*) che consente la soppressione di termini della partizione $\mathcal{S}(k)$ per passare a partizioni $\mathcal{S}(k-1)$, $\mathcal{S}(k-2)$, ...

b) Sopprimendo il termine iniziale p' della partizione $(\mathcal{S})$ dell'intero μ_k si ottiene la partizione $(\mathcal{S})$ dell'intero $\mu_k - p'$ che appartiene a $\mathcal{S}(k-1)$: si verificano questi due fatti (nell'insieme necessarî e sufficienti): i) l'intero $\mu_k - p'$ è μ_{k-1}; ii) $p' = q(\mu_{k-1})$ cioè esso è il minimo intero primo pel quale $p' + \mu_{k-1} < \bar{p}'$. Ne segue la formula ricorrente

$$\mu_k = q(\mu_{k-1}) + \mu_{k-1}. \tag{2.1}$$

I primi valori della successione $\{\mu_k\}$ si possono ricavare da una tabella numerica di A. E. WESTERN [1] che fornisce la successione $\{p_{n^*}\}$ degli interi primi $p_{n^*} < 10^7$ tali che la differenza $p_{n^*+1} - p_{n^*}$ è maggiore di ogni differenza $p_{n+1} - p_n$ con $n < n^*$: otteniamo

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 4 = 3 + 1, \quad \mu_3 = 27 = 23 + 3 + 1,$$
$$\mu_4 = 1354 = 1327 + 23 + 3 + 1, \quad \mu_5 > 10^7.$$

La successione μ_k cresce molto rapidamente: sull'andamento di questa successione possiamo ricavare la seguente debole informazione.

TEOREMA I. – *Sia θ^* l'estremo inferiore dei numeri θ tali che $p_{n+1} - p_n < p_n^\theta$ per n abbastanza grande. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, quando $k \geqq k_0(\varepsilon)$ (abbastanza grande) è*

$$\frac{1}{\theta^* + \varepsilon} \ln \mu_{k-1} < \ln \mu_k < \frac{\mu_{k-1}}{1 - \varepsilon}. \tag{2.2}$$

OSSERVAZIONI. – 1) La successione maggiorante di $\{\mu_k\}$ fornita dalla parte a destra è crescente molto rapidamente perchè è costituita da esponenziali via via iterati.

[1] Vedi A. E. WESTERN, *Note on the magnitude of the difference between successive primes*, « Journ. London Math. Soc. » **9**, 276-278, (1934); la tabella è riportata anche in G. RICCI, *La differenza di numeri primi consecutivi*, « Rend. Sem. Mat. Torino », **11**, 149-200, (1952), Errata-Corrige, Ibidem, **12**, 315, (1953) (vedi p. 192).

2) E' noto che $0 \leqq \theta^* \leqq 48/77$ [2] e quindi si può pensare, per esempio, $1/(\theta^* + \varepsilon) = 1{,}6$. La successione minorante è definitivamente un esponenziale e cioè $\exp(1{,}6(k - k_0))$.

Dimostrazione. - Dimostriamo la parte a destra.

Sia $0 < \delta \leqq 1$; per ogni $\varepsilon > 0$ esistono indici n' tali che

$$p_{n'+1} - p_{n'} > (1-\varepsilon)\ln p_{n'}, \qquad (1-\delta)\xi < p_{n'} \leqq \xi$$

quando $\xi \geqq \xi_0(\varepsilon, \delta)$ abbastanza grande. Infatti, se per ogni n tale che $(1-\delta)\xi < p_n \leqq \xi$, fosse $p_{n+1} - p_n \leqq (1-\varepsilon)\ln p_n$, allora avremmo

$$\delta\xi \sim \sum_{(1-\delta)\xi < p_n \leqq \xi} (p_{n+1} - p_n) \leqq (1-\varepsilon) \sum_{\cdots} \ln p_n$$
$$\sim (1-\varepsilon)\{\xi - (1-\delta)\xi\} = (1-\varepsilon)\delta\xi$$

che è assurdo. Questa osservazione preliminare ci consente di affermare che la successione crescente $\{p_{n'}\}$ degli interi primi $p_{n'}$ tali che $p_{n'+1} - p_{n'} > (1-\varepsilon)\ln p_{n'}$ è infinita e, d'altronde per n' abbastanza grande è $p_{n'+1} < p_{n'}/(1-\delta)^2$ e quindi (assumendo δ abbastanza piccolo) $(1-\varepsilon)\ln p_{n'+1} < (1-\varepsilon)\ln p_{n'} + 1/2$.

La definizione di $q(m)$ ci dà

$$q([(1-\varepsilon)\ln p_{n'}]) \leqq p_{n'}.$$

Sia ν il minimo n' pel quale $\mu_{k-1} = [(1-\varepsilon)\ln p_\nu]$, allora risulta $\ln p_\nu = (\mu_{k-1} + \theta)/(1-\varepsilon)$, $(0 \leqq \theta < 1)$, e quindi anche

$$q(\mu_{k-1}) \leqq p_\nu = \exp\{(\mu_{k-1} + \theta)/(1-\varepsilon)\}.$$

Impiccolendo preventivamente ε, si può trascurare θ e abbiamo, per k abbastanza grande,

$$q(\mu_{k-1}) < \exp\{\mu_{k-1}/(1-\varepsilon)\}$$

e quindi dalla (2.1)

$$\mu_k < \exp\{\mu_{k-1}/(1-\varepsilon)\} + \mu_{k-1}.$$

Impiccolendo ancora preventivamente ε, si può trascurare il secondo termine e abbiamo, per k abbastanza grande,

$$\mu_k < \exp\{\mu_{k-1}/(1-\varepsilon)\}.$$

2) Dimostriamo la parte a sinistra.

(2) Questo valore è stato dato da E. C. Titchmarsh: vedi A. E. Ingham, *On the difference between consecutive primes*, « Quarterly Journ. of Math. », (Oxford series), 8, 255-266, (1937); vedi anche G. Ricci, loc. cit. in (1) p. 185.

Per m abbastanza grande è (in base alla definizione di θ^*)

$$m < \bar{q}(m) - q(m) < (q(m))^{\theta^*+\varepsilon}$$

da cui segue $q(m) > m^{1/(\theta^*+\varepsilon)}$ e quindi per la (2.1) è, per k abbastanza grande,

$$\mu_k > \mu_{k-1}^{1/(\theta^*+\varepsilon)} + \mu_{k-1}$$

e, impiccolendo preventivamente ε, abbiamo

$$\ln \mu_k > \frac{1}{\theta^* + \varepsilon} \ln \mu_{k-1} .$$

Il teorema risulta così dimostrato.

3. - Le costanti H e $\mathfrak{C}_\delta$.

Conviene richiamare qui il significato di due costanti, che ci saranno utili per studiare la distribuzione degli interi di $\mathfrak{F}(2)$.

Fissato il numero δ, con $0 < \delta \leqq 1$, consideriamo l'intervallo $(1 - \delta)\xi < n \leqq \xi$. Denotiamo con $Z_\delta^*(\xi;\ 2a)$ il numero degli interi x pei quali sono verificate le condizioni

$$\text{(3.1)} \qquad \begin{cases} p_{x+1} - p_x = 2a \ (\text{intero pari} \geqq 2) \\ (1 - \delta)\xi < p_x \leqq \xi, \ (0 < \delta \leqq 1) ; \end{cases}$$

se detto numero si scrive sotto la forma

$$\text{(3.2)} \qquad Z_\delta^*(\xi\ ;\ 2a) = z_\delta^*(\xi;\ 2a) \cdot \prod_{3 < p \mid a} \frac{p-1}{p-2} \cdot \frac{\delta\xi}{\ln^2 \xi}$$

allora è noto, secondo V. Brun, che, per δ fisso, la funzione $z_\delta^*(\xi;\ 2a)$ dei due argomenti ξ e $2a$ è limitata superiormente nel campo $0 < 2a \leqq \delta\xi < +\infty$. Ponendo

$$\text{(3.3)} \qquad \mathfrak{C}_\delta = \limsup_{\xi \to +\infty} z_\delta^*(\xi;\ 2a) \qquad (0 < 2a \leqq \delta\xi),$$

la costante $\mathfrak{C}_\delta$ verifica le limitazioni

$$\text{(3.4)} \qquad H \leqq \mathfrak{C}_\delta \leqq 16H,$$

dove

$$H = \prod_{p \geqq 3} \left\{ 1 - \frac{1}{(p-1)^2} \right\} = 0{\cdot}6601 \ldots$$

è la costante di Shah e Wilson ([3]).

([3]) Che $\mathfrak{C}_\delta$ sia finito è risultato classico; la disuguaglianza $\mathfrak{C}_\delta \leqq 16H$, che è quella più interessante per giungere a un valore numerico in ciò che segue, è dimostrata in H. N. Shapiro and J. Warga, *On the representation*

4. – La distribuzione degli interi della forma $n=p'+p''(p'<n<\bar{p}')$.

La classe $\mathcal{S}(2)$ è costituita dagli interi delle due forme $n=p'+1$ e $n=p'+p''(p'<n<\bar{p}')$. Fissiamo l'attenzione sull'intervallo

$$(1-\delta)\xi<n\leq\xi, \qquad (0<\delta\leq 1); \tag{4.1}$$

il numero degli interi della prima forma $n=p'+1$ appartenenti a questo intervallo è

$$\backsim \pi(\xi)-\pi((1-\delta)\xi)\backsim \delta\xi/\ln\xi.$$

Ci proponiamo di valutare il numero degli interi della forma $n=p'+p''$ $(p'<n<\bar{p}')$ appartenenti allo stesso intervallo (4.1): giungeremo al risultato che *esso ha il vero ordine di grandezza* $\delta\xi/\ln\ln\xi$. Ne segue che questo è anche il vero ordine di grandezza degli interi n di (4.1) appartenenti a $\mathcal{S}(2)$.

Vale il seguente

TEOREMA II. – *Fissato* $0<\delta\leq 1$ *denotiamo con* $\mathrm{P}_2(\xi;\ \delta)$ *il numero degli interi* n *della forma*

$$n=p'+p'', \quad (p'<n<\bar{p}'); \qquad (1-\delta)\xi<n\leq\xi, \quad (0<\delta\leq 1). \tag{4.2}$$

Per ogni $\varepsilon>0$, *quando* ξ *è abbastanza grande, risulta*

$$(1-\varepsilon)\frac{H}{2\mathfrak{C}_\delta}\cdot\frac{\delta\xi}{\ln\ln\xi}<P_2(\xi;\ \delta)<(1+\varepsilon)\frac{\delta\xi}{\ln\ln\xi}. \tag{4.3}$$

A maggior ragione (vedi n. 3) si ha

$$\{(1-\varepsilon)/32\}\,\delta\xi/\ln\ln\xi<P_2(\xi;\ \delta)<(1+\varepsilon)\,\delta\xi/\ln\ln\xi.$$

DIMOSTRAZIONE. – Siano $y=y(\xi)$ e $x=x(\xi)$ indici interi definiti al modo seguente

$$p_{y-1}<(1-\delta)\xi\leq p_y<p_x\leq\xi<p_{x+1}, \qquad (x=x(\xi),\ y=y(\xi)) \tag{4.4}$$

of large integers as sums of primes, I. Communications Pure Appl. Math., **3**, 153-176, (1950), I. V. ČULANOVSKIĬ, *Alcune valutazioni connesse con un nuovo metodo di Selberg nella teoria elementare dei numeri* (in lingua russa), Doklady Akad. Nauk SSSR (N. S.) **63**, 491-494 (1948) [Vedasi il rapporto in « Math. Reviews, 10, 355-356 (1949) (P. T. BATEMAN) »]. La disuguaglianza $H\leq\mathfrak{C}_\delta$ è dimostrata in G. RICCI, *Sull'andamento della differenza di numeri primi consecutivi*, Rivista Mat. Univ. Parma, **5**, 3-54, (1954); vedi in particolare il Teorema IX, n. **2.3**, dove si trova $H\leq C_\delta(0,\ \lambda)$ e, poichè $C_\delta(0,\ \lambda)\leq C_\delta(0,\ +\infty)\leq\mathfrak{C}_\delta$, ne segue $H\leq\mathfrak{C}_\delta$. In questo lavoro si troveranno anche altre indicazioni relative ai teoremi di V. BRUN.

e poniamo

$$d_n = p_{n+1} - p_n, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Per le posizioni (4.4) risulta (essendo $0 \leqq \theta_1,\ \theta_2 \leqq 1$)

$$P_2(\xi; \delta) = \theta_1 \cdot \pi(d_{y-1}) + \sum_{y \leq u \leq x-1} \pi(d_u) + \theta_2 \cdot \pi(d_x). \tag{4.5}$$

Poichè $d_{y-1} = o(\xi)$, $d_x = o(\xi)$, i due termini estremi al secondo membro risultano $o(\xi/\ln \xi)$.

Poichè $\pi(\eta) \backsim \eta/\ln \eta$, prefissato $\varepsilon > 0$, si può determinare $K = K(\varepsilon)$, tale che per $\eta > 2K(\varepsilon)$ si abbia (si può supporre anche $2K(\varepsilon) \geqq e^2$)

$$(1 - \varepsilon/2)\eta/\ln \eta < \pi(\eta) < (1 + \varepsilon/2)\eta/\ln \eta. \tag{4.6}$$

Ripartiamo gli indici interi u del tratto $y \leqq u \leqq x - 1$ in due categorie t e v con la legge seguente:

$$\begin{cases} u = t \quad \text{se} \quad d_u \leqq 2K, & (\text{cioè } d_t \leqq 2K) \\ u = v \quad \text{se} \quad d_u > 2K, & (\text{cioè } d_v > 2K). \end{cases}$$

Osserviamo che

$$\delta\xi \backsim \sum_u d_u = \sum_t d_t + \sum_v d_v, \qquad \delta\xi/\ln \xi \backsim \sum_u 1 = \sum_t 1 + \sum_v 1. \tag{4.7}$$

Per le osservazioni e le notazioni che precedono, la (4.5) ci dà l'espressione di $P_2(\xi; \delta)$ nella forma

$$P_2(\xi; \delta) = \sum_t \pi(d_t) + \sum_v \pi(d_v) + o(\xi/\ln \xi) \tag{4.8}$$

Veniamo a maggiorare $\sum_t \pi(d_t)$: a questo scopo teniamo conto del teorema di V. Brun ricordato al n. 3 e, in particolare, della (3.2) con la proprietà di $z_\delta^*(\xi; 2a)$:

$$\begin{aligned} \sum_t 1 &= \sum_{1 \leq a \leq K} Z_\delta^*(\xi; 2a) \\ &= \left\{ \sum_{1 \leq a \leq K} z_\delta^*(\xi; 2a) \cdot \prod_{3 \leq p \mid a} \frac{p-1}{p-2} \right\} \cdot \frac{\delta\xi}{\ln^2 \xi} \\ &< K_1 \cdot \delta\xi/\ln^2 \xi, \qquad K_1 = K_1(K). \end{aligned}$$

Da questa otteniamo

$$\sum_t d_t \leqq K \sum_t 1 < KK_1 \cdot \delta\xi/\ln^2 \xi,$$

e a maggior ragione

$$\sum_t \pi(d_t) < KK_1 \cdot \delta\xi / \ln^2 \xi. \tag{4.9}$$

Introducendo (4.9) in (4.8) otteniamo

$$P_2(\xi\,;\,\delta) = \sum_v \pi(d_v) + o(\xi/\ln \xi) \tag{4.10}$$

e dalle (4.7) otteniamo anche le seguenti espressioni per le $\sum\limits_v$ (che sono preponderanti)

$$\sum_v d_v \sim \delta\xi, \qquad \sum_v 1 \sim \delta\xi/\ln \xi. \tag{4.11}$$

Essendo $d_v > 2K(\varepsilon)$ vale la limitazione (4.6) e la (4.10) ci dà

$$(1-\varepsilon/2)\sum_v \frac{d_v}{\ln d_v} - o\left(\frac{\xi}{\ln \xi}\right) < P_2(\xi\,;\,\delta) < (1+\varepsilon/2)\sum_v \frac{d_v}{\ln d_v} + o\left(\frac{\xi}{\ln \xi}\right) \tag{4.12}$$

e siamo pertanto ricondotti a studiare la somma

$$\sum_v \frac{d_v}{\ln d_v}\cdot$$

Si consideri la funzione

$$F(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_s) = \sum_{h=1}^{s} \frac{x_h}{\ln x_h}$$

nel campo $x_1 \geqq e^2$, $x_2 \geqq e^2, \ldots, x_s \geqq e^2$ e con il legame

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_s = X \qquad (X > se^2)$$

tra le s variabili $(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_s)$. Si riconosce facilmente che il massimo di F in quel campo e con quella condizione si ottiene per

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_s = X/s$$

e risulta

$$\operatorname{Max} F(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_s) = \frac{X}{\ln (X/s)}\,.$$

Per maggiorare la somma $\sum\limits_v (d_v/\ln d_v)$ si tenga presente questa considerazione di massimo che, per le (4.11), conduce ai seguenti valori

$$X = (1+o(1))\delta\xi, \qquad s = (1+o(1))\delta\xi/\ln \xi, \qquad X/s = (1+o(1))\ln \xi$$

$$\frac{X}{\ln (X/s)} = \frac{(1+o(1))\delta\xi}{\ln \ln \xi + o(1)} \sim \frac{\delta\xi}{\ln \ln \xi}\,.$$

Dalla (4.12) segue

$$P_2(\xi;\ \delta) < (1+\varepsilon)\delta\xi/\ln\ln\xi$$

per $\xi > \xi_0(\varepsilon)$ abbastanza grande: è dimostrata la (4.3) a destra.

Veniamo a dimostrare la (4.3) a sinistra: fissato $\mu > 0$, il numero degli indici interi z pei quali

$$p_{z+1} - p_z \leqq \mu \ln \xi, \qquad (1-\delta)\xi < p_z \leqq \xi$$

non supera ([4])

$$(1 + o(1))\,\frac{\mathfrak{C}_\delta}{2H}\,\mu \cdot \frac{\delta\xi}{\ln \xi}$$

e, in conseguenza, il numero degli indici interi w pei quali

$$p_{w+1} - p_w > \mu \ln \xi, \qquad (1-\delta)\xi < p_w \leqq \xi$$

risulta

$$\geqq \left\{ 1 - \frac{\mathfrak{C}_\delta}{2H}\,\mu - o(1) \right\} \cdot \frac{\delta\xi}{\ln \xi}.$$

Quando ξ è abbastanza grande, risulta $\mu \ln \xi > 2K(\varepsilon)$ e quindi tutti gli indici w appartengono alla categoria degli indici v e pertanto

$$\begin{aligned}\sum_v \frac{d_v}{\ln d_v} \geqq \sum_w \frac{d_w}{\ln d_w} &\geqq \frac{\mu \ln \xi}{\ln(\mu \ln \xi)} \sum_w 1 \\ &\geqq \frac{\mu \ln \xi}{\ln(\mu \ln \xi)} \left\{ 1 - \frac{\mathfrak{C}_\delta}{2H}\,\mu - o(1) \right\} \cdot \frac{\delta\xi}{\ln \xi} \\ &= \left\{ 1 - \frac{\mathfrak{C}_\delta}{2H}\,\mu - o(1) \right\} \mu\, \frac{\delta\xi}{\ln\ln \xi}.\end{aligned}$$

Adesso si tratta di scegliere il valore di μ più conveniente per noi: assumendo $\mu = H/\mathfrak{C}_\delta$ otteniamo

$$\sum_v \frac{d_v}{\ln d_v} \geqq (1 - o(1))\,\frac{H}{2\mathfrak{C}_\delta} \cdot \frac{\delta\xi}{\ln\ln \xi}$$

e questa valutazione al disotto, unita alla (4.12), conduce alla parte a sinistra di (4.3).

Il Teorema II risulta così dimostrato.

[4]) Vedi G. Ricci, loc. cit. in ([3]); in particolare il Lemma 5 (n. 6.2) teniamo presente che $C_\delta(0,\ \mu) \leqq \mathfrak{C}_\delta$.