Bollettino
Unione Matematica Italiana

Guido Vaona

Varietà caratteristiche di una trasformazione puntuale e varietà quasi-asintotiche.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.1, p. 32–42.
Zanichelli
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_1_32_0>

Varietà caratteristiche di una trasformazione puntuale e varietà quasi-asintotiche.

Nota di GUIDO VAONA (a Bologna)

Sunto. - *Si pone in luce un nuovo collegamento fra la teoria delle trasformazioni puntuali e quella delle varietà quasi-asintotiche, e si determinano le* V_k *che posseggono* ∞^k *calotte* $(k-1)$*-dimensionali quasi-asintotiche* $\sigma_{1,2}$ *di specie massima.*

1. Introduzione.

Il prof. VILLA ha osservato in varie occasioni alcuni interessanti collegamenti fra la teoria delle trasformazioni puntuali e quella delle varietà quasi-asintotiche [1].

Nel presente lavoro apparirà un nuovo collegamento fra le due teorie mediante il quale da proprietà note sulle trasformazioni puntuali si deducono risultati sulle varietà quasi-asintotiche.

Una trasformazione puntuale fra due spazi proiettivi ad $r(\geq 2)$ dimensioni, in ogni coppia regolare di punti corrispondenti, possiede, in generale, un numero finito $(2^r - 1)$ di rette caratteristiche. Esistono però classi di particolari tipi di trasformazioni che hanno infinite rette caratteristiche per ogni coppia regolare di punti corrispondenti.

Il problema della determinazione delle trasformazioni per le quali si presenta tale circostanza eccezionale è già stato risolto in vari casi [2]. Tale problema presenta numerosi punti di contatto

(1) Si vedano: M. VILLA, *Sull'annullarsi in un punto della matrice Jacobiana di* m *funzioni in* n *variabili*, «Accad. d'Italia, Rend.», (7), III, pp. 209-216 (1942); *Sulle trasformazioni puntuali degeneri*, «Mem. Accad. di Bologna» (9), IX, pp. 19-26 (1942); *Superficie della* V_4^6 *di* SEGRE *e relative trasformazioni puntuali*, «Mem. Accad. di Bologna» (9), IX, pp. 71-82 (1942); *Sulle direzioni caratteristiche di una trasformazione puntuale*, «Mem. Accad. di Bologna», (9), X, pp. 83-94 (1943); *Varietà quasi-asintotiche e trasformazioni puntuali*, «Ann. Univ. di Ferrara», (Nuova serie), I, pp. 17-21 (1950); *Caratterizzazioni differenziali di enti algebrici*, «Rend. Sem. Mat. e Fis. di Milano», XXI, pp. 51-58 (1950); M. VILLA e G. VAONA, *Varietà quasi-asintotiche a più indici e curve caratteristiche di una trasformazione puntuale*, «Accad. Lincei, Rend.», (8), VIII, pp. 470-476 (1950).

(2) Si vedano ad es.: M. VILLA, *Alcuni risultati e problemi sulle trasformazioni puntuali*, «Atti III Congr. Un. Mat. Ital., Pisa 1948» Perrella, Roma, pp. 157-159 (1951); E. ČECH, *Géométrie projective différentielle*

con alcuni problemi della teoria delle varietà quasi-asintotiche (q. a.), identificandosi talora con essi (n. 3).

Così ad es., tenendo conto dei risultati finora conseguiti nella teoria delle trasformazioni puntuali, si perviene in questa Nota alla determinazione delle V_k che posseggono ∞^k calotte $(k-1)$-dimensionali q.a. $\sigma_{1,2}$ di specie massima. Si dimostra infatti che tali V_k sono tutte e sole quelle dei seguenti tipi:

I. V_k *luogo di* ∞^1 S_{k-1};

II. V_k *luogo degli* ∞^2 $S(k-2)$*-osculatori alle curve asintotiche di una superficie integrale di un' equazione di Laplace di tipo parabolico;*

III. V_k *luogo degli* ∞^2 S_{k-2} *proiettanti da un* S_h $(0 \leq h \leq k-3)$ *gli* $S(k-h-3)$*-osculatori alle curve asintotiche di una superficie integrale di un' equazione di* LAPLACE *di tipo parabolico.*

IV. V_k *di* S_{k+1} *luogo di* $\infty^2 S_{k-2}$ *aventi l'* S_k *tangente fisso lungo ogni* S_{k-2} *generatore* [3].

2. Le trasformazioni puntuali fra due spazi come proiezioni di una varietà.

Una trasformazione puntuale T fra gli spazi $S_r(x_0, x_1, \ldots, x_r)$, $S_r'(y_0, y_1, \ldots, y_r)$ si può rappresentare con equazioni parametriche del tipo

$$(1) \qquad x_i = x_i(u_1, u_2, \ldots, u_r), \qquad (1') \; y_i = y_i(u_1, u_2, \ldots, u_r),$$

convenendo di assumere come corrispondenti coppie di punti X, Y

des correspondences entre deux espaces, I. II. III., «Čas. Pro Pěst. Mat. a Fys.» vol. 74, pp. 32-48, vol. 75, pp. 123-158 (1950); *Deformazione proiettiva di strati di ipersuperficie,* «Atti Convegno internazionale di Geometria differenziale, Italia - settembre 1953», Perrella, Roma, pp. 266-273 (1954); G. VAONA, *Le trasformazioni fra due spazi che posseggono iperpiani di rette caratteristiche per ogni punto,* «Rendiconti del Sem. Mat. di Torino», vol. XII, pp. 195-238 (1953).

(3) Tale problema è già stato parzialmente risolto per $k=3$, nell'ipotesi che le ∞^3 calotte q.a. siano organizzabili in ∞^1 superficie. Si veda: L. MURACCHINI, *Ricerche sulle varietà quasi-asintotiche.* I. *Quasi-asintotiche* $\sigma_{1,2}$, «Boll. Un. Mat. Ital.» (3), VI, pp. 198-205 (1951).

Togliendo l'ipotesi dell'organizzabilità il problema presenta gravi difficoltà di calcolo come appare dalla trattazione completa del caso più semplice $k=3$ (si vedano i nn. 5 e 6). In sostanza tali difficoltà vengono qui superate, col procedimento indicato al n. 3, in virtù di risultati noti sulle trasformazioni puntuali.

le cui coordinate si ottengono dalle (1), (1') per gli stessi valori dei parametri, ed essendo

$$| x \, x^1 \dots x^r | \neq 0, \qquad | y \, y^1 \dots y^r | \neq 0 \text{ [1]}.$$

Consideriamo ora uno spazio S_m con $m \geq 2r + 1$, contenente S_r, S_r', ed indichiamo con $z_0, z_1, \dots, z_m$ le coordinate omogenee in tale spazio. Consideriamo in S_m la varietà V_r, ad r dimensioni, di equazioni

$$(2) \qquad \begin{aligned} z_i &= x_i(u_1, u_2, \dots, u_r) \\ z_{r+1+i} &= y_i(u_1, u_2, \dots, u_r) \qquad (i = 0, 1, \dots, r) \\ z_{2r+1+j} &= z_j(u_1, u_2, \dots, u_r) \qquad (j = 1, 2, \dots, m - 2r - 1), \end{aligned}$$

dove le x, y sono le stesse funzioni (1), (1') e le z funzioni arbitrarie.

La trasformazione T si può ottenere proiettando la V_r di equazioni (2) sugli S_r, S_r' di equazioni $z_{r+1} = z_{r+2} = \dots = z_m = 0$, $z_0 = z_1 = \dots = z_r = z_{2r+2} = \dots = z_m = 0$, rispettivamente dagli S_{m-r}, sghembi con S_r e S_r', di equazioni $z_0 = z_1 = \dots = z_r = 0$, $z_{r+1} = z_{r+2} = \dots = z_{2r+1} = 0$, ed associando coppie di punti X, Y di S_r, S_r' che siano le proiezioni di un punto Z della V_r.

La trasformazione T si ottiene anche, con le stesse operazioni di proiezione e sezione, considerando la V_r di equazioni.

$$(3) \qquad \begin{aligned} z_i &= x_i \\ z_{r+1+i} &= \rho y_i \\ z_{2r+1+j} &= z_j, \end{aligned}$$

dove ρ ($\neq 0$) è una funzione arbitraria di $u_1, u_2, \dots, u_r$.

Osserviamo che, in generale, la trasformazione T muta cambiando i centri di proiezione, mentre ciò non avviene cambiando gli spazi seganti.

Come il prof. Villa mi ha fatto osservare, le V_r di equazioni (3), in quanto rappresentative delle coppie di punti corrispondenti in T, si possono porre in relazione con la V_r rappresentativa di T sulla V_{2r} di SEGRE. Infatti ciascuna delle V_r si ottiene considerando la varietà rigata di equazioni (3), ove ρ si riguardi come un parametro indipendente, e fissando un punto su ogni generatrice. E le V_r di equazioni (3) ottenute per $\rho = \frac{x_h}{y_k}$, essendo h e k due arbitrari fra i numeri $0, 1, \dots, r$, appartengono al cono che proietta da uno spazio opportuno la V_r rappresentativa di T sulla V_{2r} di SEGRE.

[1] Indichiamo con x^i, x^{ij}, ... le derivate parziali $\frac{\partial x}{\partial u_i}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}$, ... e con x l'insieme delle coordinate di un punto, omettendo l'indice in basso.

3. Varietà caratteristiche di una trasformazione puntuale e varietà quasi-asintotiche.

Per lo scopo che ci siamo prefissi è fondamentale la proprietà evidente:

Se p *è una tangente asintotica relativa ad un punto* Z *di una* V_r *di* S_m ($m \geq 2r+1$), *in ogni trasformazione puntuale, ottenuta proiettando la* V_r *da due* S_{m-r} *su due* S_r, *le due rette proiezioni di* p *sono rette caratteristiche relative alla coppia di punti corrispondenti* X, Y *proiezioni di* Z.

Da tale proprietà, ricordando che ogni calotta h-dimensionale del 1. ordine q.a. $\sigma_{1,2}$ di specie massima [5] è luogo di direzioni asintotiche, segue che:

Ogni trasformazione puntuale fra due S_r, *ottenuta proiettando una* V_r *avente una o più calotte h-dimensionali q.a.* $\sigma_{1,2}$ *di specie massima per ogni punto generico, possiede almeno* ∞^{h-1} *direzioni caratteristiche per ogni coppia generica di punti corrispondenti, costituenti uno o più* S_h, *che sono le proiezioni degli* E_1 *appartenenti alle calotte q.a. della* V_r.

Ora è spontaneo chiedersi se, inversamente, ogni trasformazione puntuale fra S_r, avente uno o più S_h di rette caratteristiche in ogni coppia generica, possa ottenersi proiettando una V_r che possiede una o più calotte h-dimensionali q.a. $\sigma_{1,2}$ di specie massima per ogni punto generico; in altri termini, se sia sempre possibile scegliere le funzioni arbitrarie che figurano nelle (3) in modo che la V_r possegga le suddette calotte q.a..

Orbene ciò in generale non è vero [6] ma esistono particolari valori di r e di h per cui si verifica la circostanza sopra considerata (n. 4). È chiaro come, in questi ultimi casi, coincidano i due problemi: determinazione delle trasformazioni che posseggono uno o più S_h di rette caratteristiche per ogni coppia generica di punti corrispondenti; determinazione delle V_r che posseggono una o più calotte h-dimensionali q.a. $\sigma_{1,2}$ di specie massima per ogni punto generico.

In gni caso, risolto il problema per le trasformazioni puntuali, sarà agevole risolvere quello relativo alle q.a.. Basterà vedere

(5) Per la nozione di calotta q.a. e quella di specie di una q a , vedansi: M. Villa, *Sulle superficie quasi-asintotiche della* $V_4{}^6$ *di* S_8 *che rappresenta le coppie di punti di due piani*, «Acc. d'Italia, Rend », (7), I, pp. 228-237 (1940); L. Muracchini, op. cit. in (3).

(6) Ad es. nel caso $r=3$, $h=1$; si veda: E. Čech, il 2° dei lavori cit. in (2).

quali, fra i tipi di trasformazioni trovate, possono ottenersi per proiezioni di una varietà avente le volute infinità di calotte q.a..

In un lavoro recente ([7]) ho risolto completamente il problema della determinazione delle trasformazioni puntuali fra due S_r $(r > 3)$ che posseggono uno o due iperpiani di rette caratteristiche per ogni coppia regolare di punti corrispondenti. Seguendo il procedimento indicato sarà quindi possibile determinare le V_k $(k > 3)$ che posseggono ∞^k calotte $(k-1)$-dimensionali q.a. $\sigma_{1,2}$ di specie massima.

Per completezza tratteremo anche il caso $k=3$, in modo diretto, servendoci dei risultati già stabiliti dal MURACCHINI, che ha determinato le V_3 soddisfacenti alle condizioni enunciate ed all'ipotesi che le ∞^3 calotte q.a. siano organizzabili in uno o due sistemi di ∞^1 superficie ([8]).

4. Le $V_k (k > 3)$ che posseggono ∞^k calotte $(k-1)$-dimensionali q.a. $\sigma_{1,2}$ di specie massima.

Ricordiamo quali sono le trasformazioni puntuali fra due S_k $(k > 3)$ che posseggono uno e due iperpiani di rette caratteristiche per ogni coppia regolare. Nel lavoro citato ho stabilito che:

Le trasformazioni fra due S_k $(k > 3)$ aventi *due iperpiani* di rette caratteristiche per ogni coppia regolare sono tutte e sole quelle che si ottengono con le seguenti costruzioni:

1. In un S_m $(m \geq 2k+1)$ si fissi una V_k appartenente ad un S_{k+1} luogo di ∞^1 S_{k-2} avente l'S_k tangente fisso lungo ogni S_{k-2} generatore. Su due S_k di S_m si associno coppie di punti che sono le proiezioni di uno stesso punto della V_k da due S_{m-k} fissi, sghembi con l'uno e l'altro dei due S_k rispettivamente.

2. Si fissi in S_m una V_k luogo di ∞^1 S_{k-1} avente l'S_k tangente fisso lungo ogni S_{k-1} generatore, e si eseguano le operazioni di proiezione e sezione descritte in 1. ([9]).

Le trasformazioni fra due S_k $(k > 3)$ aventi *un iperpiano* di rette caratteristiche per ogni coppia regolare sono tutte e sole quelle che si ottengono con le seguenti costruzioni:

([7]) Op. cit. in ([2]).

([8]) Si veda: L. MURACCHINI, op. cit. in ([3]).

([9]) Nel mio lavoro cit. in ([2]) a p. 207 sono indicati tre tipi di trasformazioni. Si può provare però che il 1° e 3° rientrano entrambi in questo.

3. Si fissi in S_m una V_k luogo di $\infty^1 \cdot S_{k-1}$ e si eseguano le operazioni di proiezione e sezione descritte in 1. ([10]).

4. Si fissi in S_m una V_k luogo degli ∞^2 $S(k-2)$-osculatori alle curve asintotiche di una superficie integrale di un'equazione di LAPLACE di tipo parabolico e si eseguano le operazioni descritte in 1.

5. Si fissi in S_m una V_k luogo degli ∞^2 S_{k-2} proiettanti da un S_h $(0 \leq h \leq k-3)$ gli $S(k-h-3)$-osculatori alle curve asintotiche di un superficie integrale di un'equazione di LAPLACE di tipo parabolico e si eseguano le operazioni descritte in 1.

Per determinare le V_k $(k > 3)$ aventi una o due calotte $(k-1)$-dimensionali q.a. $\sigma_{1,2}$ di specie massima per ogni punto generico, basterà vedere quali delle varietà V_k di equazioni (3), che si ottengono partendo dalle trasformazioni trovate, godono della proprietà predetta.

Si vede subito che le uniche V_k aventi due calotte q.a. per ogni punto sono quelle che intervengono nelle costruzioni delle trasformazioni 1. e 2. Le V_k che figurano nella costruzione 1. posseggono due calotte q.a. distinte, quelle della costruzione 2. due calotte coincidenti. Si osservi che le calotte delle 1. non sono generalmente organizzabili in ipersuperficie, mentre tali sono quelle delle 2. Queste V_k, riferendoci ai tipi elencati nell'introduzione, sono rispettivamente tutte quelle del tipo IV ed un caso particolare del tipo I.

Le V_k aventi una calotta q.a. per ogni punto sono soltanto quelle che intervengono nelle costruzioni 3., 4., 5. Per quelle provenienti dal tipo 3. la cosa è ovvia.

Consideriamo una trasformazione del tipo 4. Le sue equazioni parametriche si possono scrivere ([11]).

$$x_i = P_i(u_{k-1}, u_k) + u_1 \frac{\partial P_i}{\partial u_{k-1}} + \ldots + u_{k-2} \frac{\partial^{k-2} P_i}{\partial u_{k-1}^{k-2}} \tag{4}$$

$$y_i = Q_i(u_{k-1}, u_k) + u_1 \frac{\partial Q_i}{\partial u_{k-1}} + \ldots + u_{k-2} \frac{\partial^{k-2} Q_i}{\partial u_{k-1}^{k-2}}, \tag{5}$$

dove le P e Q sono integrali dell'equazione differenziale

$$X^k = aX + bX^{k-1} + cX^{k-1,k-1}. \tag{6}$$

([10]) Nel mio lavoro cit. in ([2]) la costruzione indicata è diversa ma ovviamente equivalente a questa come appare dalle equazioni (50), (50') di p. 225.

([11]) Si veda il mio lavoro cit. in ([2]) pp. 228-234.

Affinchè la varietà di equazioni parametriche

$$z_i = x_i$$
$$z_{k+1+i} = \rho y_i \qquad (i = 0,\, 1, \dots,\, k)$$
$$z_{2k+1+j} = z_j \qquad (j = 1,\, 2, \dots,\, m - 2k - 1),$$

possegga una calotta q.a. per ogni punto deve essere $\rho = \text{cost.}$ e le z_j devono essere del tipo $z = R(u_{k-1},\, u_k) + u_1 \frac{\partial R}{\partial u_{k-1}} + \dots + u_{k-2} \frac{\partial^{k-2} R}{\partial u_{k-1}^{k-2}}$. con le R integrali della (6).

Analogamente si può procedere per le V_k provenienti dalle trasformazioni del tipo 5., provando l'asserto.

Si può allora concludere che le V_k soddisfacenti alle condizioni più volte enunciate sono tutte e sole quelle elencate nell'introduzione.

Osserviamo che le calotte q.a. sono organizzabili in ∞^1 V_{k-1} in tutti i casi escluso il IV.

5. Le V_3 che posseggono due calotte piane q.a. $\sigma^3{}_{1,2}$ per ogni punto.

Per $k = 3$ non sono state determinate tutte le trasformazioni aventi un piano di rette caratteristiche per ogni coppia regolare, ma solamente quelle per cui tali piani sono organizzabili nei piani tangenti ad ∞^1 superficie ([12]). Applicando quindi il procedimento indicato al n. 2 si possono determinare solamente le V_3 che posseggono ∞^3 calotte q.a. $\sigma^3{}_{1,2}$ organizzabili in ∞^1 superficie, cioè le V_3 già determinate dal Muracchini. Determiniamo perciò direttamente le V_3 in questione.

Affinchè la V_3 di equazioni parametriche

$$x = x(u_1,\, u_2,\, u_3) \tag{7}$$

possegga, per ogni punto generico, la calotta piana q.a. $\sigma^3{}_{1,2}$ di equazione

$$du_3 = \alpha_1 du_1 + \alpha_2 du_2, \tag{8}$$

è necessario e sufficiente che le funzioni x siano integrali del sistema di equazioni differenziali

([12]) Si veda: E. Čech il 2° dei lavori cit. in ([2]).

$$
(9) \qquad \begin{aligned}
&x^{11} + 2\alpha_1 x^{13} + \alpha_1\alpha_1 x^{33} = \lambda x + \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3 \\
&x^{12} + \alpha_2 x^{13} + \alpha_1 x^{23} + \alpha_1\alpha_2 x^{33} = \mu x + \mu_1 x^1 + \mu_2 x^2 + \mu_3 x^3 \\
&x^{22} + 2\alpha_2 x^{23} + \alpha_2\alpha_2 x^{33} = \nu x + \nu_1 x^1 + \nu_2 x^2 + \nu_3 x^3 .
\end{aligned}
$$

Affinchè poi la V_3 (7) possegga per ogni punto due calotte q.a. $\sigma^3{}_{1,2}$ distinte di equazioni (8) e

$$
(8') \qquad du_3 = \beta_1 du_1 + \beta_2 du_2 ,
$$

è necessario e sufficiente che le x siano integrali del sistema di equazioni differenziali (9) e del sistema (9′) che si ottiene ponendo nelle (9) β_1, β_2 al posto di α_1, α_2 e $\bar\lambda, \bar\lambda_1, \ldots, \bar\nu_3$ al posto di $\lambda, \lambda_1, \ldots, \nu_3$.

Poichè $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, cinque almeno delle sei equazioni (9), (9′) sono linearmente indipendenti e quindi la V_3 è di uno dei tipi:

a) V_3 di S_4;

b) V_3 luogo di ∞^1 piani con S_3 tangente fisso lungo ogni piano generatore ([13]).

Le varietà *b*) posseggono due calotte q.a. $\sigma^3{}_{1,2}$ coincidenti per ogni punto generico. Fra le *a*) soddisfano all'ipotesi solo quelle che sono luogo di ∞^2 rette con S_3 tangente fisso lungo ogni generatrice.

Affinchè poi una V_3 possegga per ogni punto due calotte q.a. $\sigma^3{}_{1,2}$ coincidenti nella calotta di equazione (8), è necessario e sufficiente che le x soddisfino al sistema (9) ed alle equazioni

$$
(10) \qquad \begin{aligned}
&x^{13} - \alpha_1 x^{33} = \bar\lambda x + \bar\lambda_1 x^1 + \bar\lambda_2 x^2 + \bar\lambda_3 x^3 \\
&x^{23} - \alpha_2 x^{33} = \bar\mu x + \bar\mu_1 x^1 + \bar\mu_2 x^2 + \bar\mu_3 x^3 .
\end{aligned}
$$

Essendo le (9) e (10) linearmente indipendenti, si può ripetere il precedente ragionamento e concludere che la V_3 è necessariamente del tipo *b*).

Riassumendo, riferendoci ai tipi elencati nell'introduzione, le V_3 che posseggono due calotte q.a. $\sigma^3{}_{1,2}$ per ogni punto sono tutte quelle del tipo IV ed un caso particolare del tipo I.

([13]) Se una V_3 è integrale di cinque equazioni di LAPLACE il suo $S(2)$-osculatore ha dimensione quattro; essa è perciò di uno dei tipi *a*) o *b*). Si veda ad es.: U. LEVI, *Intorno alle varietà a tre dimensioni che rappresentano un sistema di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali del 2° e del 3° ordine*, «Rend. Sem. Mat. Padova», IV pp. 27-37 (1933).

6. Le V_3 che posseggono una calotta piana q.a. $\sigma^3_{1,2}$ per ogni punto.

Dimostreremo in questo numero che le V_3 che posseggono *una sola* calotta piana q.a. $\sigma^3_{1,2}$ per ogni punto sono quelle dei tipi I, II e III nominati nell'introduzione.

Si ha il teorema:

Se una V_3 *possiede* ∞^3 *calotte piane q.a.* $\sigma^3_{1,2}$, *ed esattamente una per ogni punto, tali calotte sono sempre organizzabili in* ∞^1 *superficie.*

Da tale teorema consegue che le V_3 richieste sono quelle già trovate dal MURACCHINI e cioè le I, II, III.

Affinchè le ∞^3 calotte piane di equazione (8) siano organizzabili in superficie è necessario e sufficiente che tale equazione sia completamente integrabile. La condizione di integrabilità si scrive

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_2} + \alpha_2 \frac{\partial\alpha_1}{\partial u_3} = \frac{\partial\alpha_2}{\partial u_1} + \alpha_1 \frac{\partial\alpha_2}{\partial u_3}. \tag{11}$$

Ora, in quel che segue. dimostreremo appunto che la (11) è una conseguenza delle ipotesi ammesse.

Indichiamo con (9_1), (9_2). (9_3) ordinatamente le equazioni del sistema (9) e con (I), (II), ..., (IX) le equazioni del 3. ordine ottenute derivando le (9) rispetto ad u_1, u_2, u_3; omettiamo per brevità di scrivere tali equazioni.

Sommando membro a membro le equazioni

$$\begin{array}{llll}
(9_1) & \text{moltiplicata} & \text{per} & -\mu_1 \\
(9_2) & \text{»} & \text{»} & \lambda_1 - \mu_2 \\
(9_3) & \text{»} & \text{»} & \lambda_2 \\
(\mathrm{II}) & \text{»} & \text{»} & -1 \\
(\mathrm{III}) & \text{»} & \text{»} & -\alpha_2 \\
(\mathrm{IV}) & \text{»} & \text{»} & 1 \\
(\mathrm{VI}) & \text{»} & \text{»} & \alpha_1,
\end{array}$$

si ottiene la nuova equazione differenziale del 2. ordine

$$\beta x^{13} + \gamma x^{23} + \delta x^{33} = \rho x + \rho_1 x^1 + \rho_2 x^2 + \rho_3 x^3, \tag{12}$$

dove

$$\beta = 2\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_2} + \alpha_2 \frac{\partial\alpha_1}{\partial u_3}\right) - \left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial u_1} + \alpha_1 \frac{\partial\alpha_2}{\partial u_3}\right) - \mu_1\alpha_1 - \mu_2\alpha_2 + \mu_3$$

$$\gamma = -\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_1} + \alpha_1 \frac{\partial\alpha_1}{\partial u_3}\right) + \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 - \lambda_3$$

$$\delta = \alpha_1\beta + \alpha_2\gamma$$

e non scriviamo esplicitamente i valori dei ρ non intervenendo essi nel seguito.

Analogamente sommando membro a membro le equazioni

$$\begin{array}{rlll} (9_1) & \text{moltiplicata} & \text{per} & \nu_1 \\ (9_2) & \quad » & \quad » & \nu_2 - \mu_1 \\ (9_3) & \quad » & \quad » & -\mu_2 \\ (\mathrm{V}) & \quad » & \quad » & 1 \\ (\mathrm{VI}) & \quad » & \quad » & \alpha_2 \\ (\mathrm{VII}) & \quad » & \quad » & -1 \\ (\mathrm{IX}) & \quad » & \quad » & -\alpha_1, \end{array}$$

si ha l'equazione del 2. ordine

$$Bx^{13} + Cx^{23} + Dx^{33} = \sigma x + \sigma_1 x^1 + \sigma_2 x^2 + \sigma_3 x^3, \tag{13}$$

dove

$$B = -\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial u_2} + \alpha_2 \frac{\partial\alpha_2}{\partial u_3}\right) + \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 - \nu_3$$

$$C = 2\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial u_1} + \alpha_1 \frac{\partial\alpha_2}{\partial u_2}\right) - \left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_2} + \alpha_2 \frac{\partial\alpha_1}{\partial u_3}\right) - \mu_1\alpha_1 - \mu_2\alpha_2 + \mu_3$$

$$D = \alpha_1 B + \alpha_2 C.$$

Per quanto si è visto nel n. precedente, nel caso in esame le cinque equazioni (9), (12) e (13) non possono essere linearmente indipendenti. Due casi sono quindi possibili:

a) le (12) e (13) sono entrambe linearmente dipendenti dalle (9) e si riducono quindi a due identità;

b) Una delle (12) e (13) è linearmente dipendente dalle (9) e dalla rimanente.

Nel caso *a*) deve essere in particolare $\beta = 0$ e $C = 0$, donde segue la (11).

Nel caso *b*) devono essere nulli tutti i minori del 2. ordine estratti dalla matrice

$$\begin{Vmatrix} \beta & \gamma & \delta \\ B & C & D \end{Vmatrix}$$

e non tutti nulli i minori del 1. ordine.

Se $\beta = C = 0$, segue ancora la (11). Se invece ad es. $\beta \neq 0$, deriviamo la (12) rispetto ad u_1, u_2, u_3 ed indichiamo con (X), (XI) e (XII) le equazioni ottenute.

Sommando membro a membro le equazioni

(9_2)	moltiplicata per	$-\rho_1$
(9_3)	» »	$-\rho_2$
(VI)	» »	$-\beta$
(IX)	» »	$-\gamma$
(XI)	» »	1
(XII)	» »	α_2,

si ha l'equazione del 2. ordine

$$Hx^{13} + Kx^{23} + Lx^{33} = [1],$$

dove

$$H = -\left(\frac{\partial\beta}{\partial u_2} + \alpha_2\frac{\partial\beta}{\partial u_3}\right) + \beta\frac{\partial\alpha_2}{\partial u_3} - \beta\mu_1 - \gamma\nu_1$$

$$K = -\left(\frac{\partial\gamma}{\partial u_2} + \alpha_2\frac{\partial\gamma}{\partial u_3}\right) + \beta\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_3} + 2\gamma\frac{\partial\alpha_2}{\partial u_3} - \beta\mu_2 - \gamma\nu_2 - \alpha_1\rho_1 - \alpha_2\rho_2 + \rho_3$$

$$L = \alpha_1 H + \alpha_2 K + \beta\left[-\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_2} + \alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_3}\right) + \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 - \mu_3\right] +$$
$$+ \gamma\left[-\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial u_2} + \alpha_2\frac{\partial\alpha_2}{\partial u_3}\right) + \alpha_1\nu_1 + \alpha_2\nu_2 - \nu_3\right]$$

e con [1] si indicano i termini contenenti x e le derivate prime.

Per non ricadere nei casi visti al n. precedente è chiaro che la (14) deve essere linearmente dipendente dalle (9) e (12) e quindi in particolare deve essere

$$L = \alpha_1 H + \alpha_2 K.$$

Tenendo presente che $\beta C - \gamma B = 0$, dalla relazione precedente segue

$$2\beta\left[\frac{\partial\alpha_2}{\partial u_1} + \alpha_1\frac{\partial\alpha_2}{\partial u_3} - \left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_2} + \alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial u_3}\right)\right] = 0,$$

e quindi, essendo $\beta \neq 0$, si ritrova la (11).

Alla stessa conclusione si perviene nel caso $\beta = 0$, $C \neq 0$, operando in modo analogo sulla (13) anzichè sulla (12).