Giuseppe Palamà

Limitazioni di taluni polinomi e in particolare di quelli di Laguerre.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.1, p. 47–51.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_1_47_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Limitazioni di taluni polinomi e in particolare di quelli di Laguerre.

Nota di GIUSEPPE PALAMÀ (a Lecce)

Sunto. *È contenuto nella breve introduzione che segue.*

Con un metodo del tutto elementare si ottengono qui limitazioni di polinomi di una classe assai estesa che comprende, ad es., quelli di LAGUERRE.

Il metodo consiste nello sviluppo di un polinomio in frazione continua e nel dimostrare, sotto certe condizioni, che il polinomio è compreso fra due qualsiasi ridotte successive a partire da quella avente un indice opportuno.

1. O. PERRON [1] dà il seguente sviluppo in frazione continua di una serie di potenze

$$(1)\quad c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n+\ldots=c_0+\frac{c_1x|}{|1}-\frac{\frac{c_2}{c_1}x\,\Big|}{\Big|1+\frac{c_2}{c_1}x}-\ldots-\frac{\frac{c_n}{c_{n-1}}x\,\Big|}{\Big|1+\frac{c_n}{c_{n-1}}x}-\ldots,$$

[1] Cfr. O. PERRON, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, Leipzig und Berlin, (pp. XII + 520), (1953), p. 207.

che, se il primo membro della (1) è il polinomio

$$B_n^{(\alpha)}(x) = c_0 - c_1 x + c_2 x^2 - \dots + (-1)^n c_n x^n, \tag{2}$$

in cui c_i sono funzioni di n ed α (od eventualmente di r altri parametri $\alpha_1, \dots, \alpha_r$), dà, se poniamo inoltre

$$\frac{c_{i+1}}{c_i} x = b_i, \qquad c_i \neq 0, \qquad x \neq 0, \tag{3}$$

$$B_n^{(\alpha)}(x) = c_0 \frac{-c_1 x \mid}{\mid 1} + \frac{b_1 \mid}{\mid 1 - b_1} + \dots + \frac{b_{n-1} \mid}{\mid 1 - b_{n-1}}. \tag{4}$$

Alla (4) può darsi la forma più simmetrica ($c_1 x \neq 0$)

$$A_n^{(\alpha)}(x) \equiv \frac{c_0 - B_n^{(\alpha)}(x)}{c_1 x} = \frac{1 \mid}{\mid 1} + \frac{b_1 \mid}{\mid 1 - b_1} + \dots + \frac{b_{n-1} \mid}{\mid 1 - b_{n-1}}. \tag{5}$$

Ora, le successive ridotte della (5), mentre hanno tutte il denominatore uguale ad 1, hanno i numeratori, che indichiamo con A_r ($r = 0, 1 \dots, n$), dati da

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = 0, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 1 - b_1, \dots, \\ A_r = 1 - b_1 + b_1 b_2 - \dots + (-1)^{r-1} b_1 b_2 \dots b_{r-1}. \end{array} \right. \tag{6}$$

Se poi per α (o per gli eventuali parametri $\alpha_1, \dots, \alpha_r$), n ed x opportuni si ha

$$0 < b_1 = \frac{c_2}{c_1} x < 1 \tag{7}$$

e se le b_i, con l'aumentare di i, decrescono rimanendo però positive, la semplice ispezione delle (6) dà

$$0 = A_0 < A_1, \quad A_1 > A_2, \quad A_2 < A_3, \quad A_3 > A_4, \dots$$

e:

a) se n è dispari

$$A_1 > A_3 > A_5 > \dots > A_n = A_n^{(\alpha)}(x),$$
$$0 = A_0 < A_2 < A_4 < \dots < A_{n-1} < A_n = A_n^{(\alpha)}(x);$$

e quindi

$$A_1 > A_3 > \dots > A_{n-2} > A_n = A_n^{(\alpha)}(x) > A_{n-1} > A_{n-3} > \dots > A_2 > A_0.$$

b) se n è pari

$$A_1 > A_3 > \dots > A_{n-1} > A_n = A_n^{(\alpha)}(x) > A_{n-2} > \dots > A_2 > A_0.$$

Pertanto $A_n^{(\alpha)}(x)$, qualunque sia la parità di n, è compresa tra due ridotte successive, cioè si ha

$$(8) \qquad A_i < A_n^{(\alpha)}(x) < A_{i+1}, \qquad \text{se } i \text{ è pari, } i < n-1;$$

$$(9) \qquad A_{i+1} < A_n^{(\alpha)}(x) < A_i, \qquad \text{se } i \text{ è dispari, } i < n-1.$$

La differenza delle due ridotte A_i, A_{i+1}, tra cui è compreso $A_n^{(\alpha)}(x)$, è uguale a

$$(-1)^i b_1 b_2 \dots b_i$$

che, per l'ipotesi fatta (b_i positive, decrescenti e minori di 1) va diminuendo con l'aumentare di i.

In particolare dalla (8) si ha per $i = 2$

$$1 - b_1 < A_n^{(\alpha)}(x) < 1 - b_1 + b_1 b_2.$$

con

$$0 < b_1 < 1.$$

2. Se la (7) non è soddisfatta, avendosi

$$b_i > 1, \quad \text{per } i = 1, 2, \dots, r-2.$$
$$0 < b_{r-1} < 1,$$

conservando però l'ipotesi che le b_{r-1}. b_r, ... siano positive e decrescenti, si ha un risultato analogo al precedente e cioè che $A_{n(x)}^{(\alpha)} = A_n$, è sempre compreso tra due ridotte successive a partire però da quella di indice r e quindi sussiste anche in questo caso la (8) ma per $i \geq r$.

Ora se poniamo

$$B_{n,i}^{(\alpha)}(x) = c_0 - c_1 x + b_1 c_1 x - b_1 b_2 c_1 x + \dots + (-1)^i b_1 b_2 \dots b_{i-1} c_1 x,$$

cui, a mezzo della (3), si dà subito la forma

$$(10) \qquad B_{u,i}^{(\alpha)}(x) = c_0 - c_1 x + c_2 x^2 - c_3 x^3 + \dots + (-1)^i c_i x^i,$$

dalle (8), (9), dopo avervi fatto $i \equiv r$, a mezzo delle (5), (6), (10) si ha con facilità rispettivamente ($c_1 x > 0$)

$$(11) \qquad B_{n,r+1}^{(\alpha)}(x) < B_n^{(\alpha)}(x) < B_{n,r}^{(\alpha)}(x), \qquad \text{se } r \text{ è pari;}$$

$$(12) \qquad B_{n,r}^{(\alpha)}(x) < B_n^{(\alpha)}(x) < B_{n,r+1}^{(\alpha)}(x), \qquad \text{se } r \text{ è dispari,}$$

purchè sia

$$0 < x < \frac{c_{i-1}}{c_i}.$$

Si noti poi che è per le (10) e (2)

$$B^{(\alpha)}_{n,n}(x) = B^{(\alpha)}_n(x).$$

Inoltre maggiorazioni e minorazioni di $B^{(\alpha)}_{n,r}(x)$ si possono ottenere subito, se le c_i sono tutte positive. Ad esempio, poichè la (11) per $r = 2$, dà

$$c_0 - c_1 x + c_2 x^2 - c_3 x^3 < B^{(\alpha)}_n(x) < c_0 - c_1 x + c_2 x^2, \tag{13}$$

per

$$0 < x < \frac{c_1}{c_2}, \tag{14}$$

dalla (13) si ha, se teniamo presente la (14)

$$c_0 - \frac{c_1^{\ 2}}{c_2}\left(1 + \frac{c_1 c_3}{c_2^{\ 2}}\right) < B^{(\alpha)}_n(x) < c_0 + \frac{c_1^{\ 2}}{c_2}, \tag{15}$$

$$0 < x < \frac{c_1}{c_2}.$$

3. Applichiamo i risultati precedenti ai polinomi di LAGUERRE.

Per tali polinomi la condizione, se è $0 < b_i < 1$, che i successivi b_{i+1}, $b_{i+2}, \ldots$, si mantengano positivi e decrescano, è soddisfatta per qualunque i.

Se assumiamo

$$B^{(\alpha)}_n(x) \equiv n\,!\, L^{(\alpha)}_n(x) = (\alpha + 1,\ n) - \binom{n}{1}(\alpha + 2,\ n - 1)x + \ldots + (-1)^n x^n,$$

$$B^{(\alpha)}_{n,i}(x) \equiv n\,!\, L^{(\alpha)}_{n,i}(x) = (\alpha + 1,\ n) -$$

$$- \binom{n}{1}(\alpha + 2,\ n - 1)x + \ldots + (-1)^i(\alpha + i + 1,\ n - i)x^i,$$

che danno

$$L^{(\alpha)}_{n,n}(x) = L^{(\alpha)}_n(x),$$

dalla (5) si ha

$$A^{(\alpha)}_n(x) \equiv \frac{\alpha + 1}{nx} - \frac{(n-1)\,!\, L^{(\alpha)}_n(x)}{(\alpha + 2,\ n - 1)x},$$

$$b_m = \frac{(n - m)x}{(\alpha + m + 1)(m + 1)}, \quad m = 1,\ 2, \ldots,\ n - 1.$$

Inoltre, supposto $\alpha + 1 > 0$, dalle (11) e (12) si trae rispettivamente

$$(16)\qquad L_{n,r+1}^{(\alpha)}(x) < L_n^{(\alpha)}(x) < L_{n,r}^{(\alpha)}(x), \qquad \text{se } r \text{ è pari, } r < n-1,$$

$$(17)\qquad L_{n,r}^{(\alpha)}(x) < L_n^{(\alpha)}(x) < L_{n,r+1}^{(\alpha)}(x), \qquad \text{se } r \text{ è dispari, } r < n-1,$$

per

$$b_m > 1, \qquad m = 1, 2, \dots, r-2,$$

e

$$b_{r-1} = \frac{n-r+1}{r(\alpha+r)} x < 1,$$

cioè per

$$x > \frac{(m+1)(\alpha+m+1)}{n-m}, \quad m = 1, 2, \dots, r-2,$$

e

$$x < \frac{r(\alpha+r)}{n-r+1}.$$

Si noti che anche per n molto grande, con la scelta opportuna di α ed r, x può risultare anche grande e che le (16) e (17) sussistono per ogni x soddisfacente alla

$$0 < x < \frac{r(\alpha+r)}{n-r+1}.$$

In particolare, se poniamo

$$d_i = \frac{\alpha+i+1}{n-i},$$

le (13) e (15) rispettivamente diventano

$$L_{n,3}^{(\alpha)}(x) < L_n^{(\alpha)}(x) < L_{n,2}^{(\alpha)}(x), \qquad n > 3;$$
$$0 < x < 2d_1$$

$$(18)\quad (\alpha+1,\ n)\left(1 - \frac{10d_1}{3d_0}\right) < L_n^{(\alpha)}(x) < (\alpha+1,\ n)\left(1 + \frac{2d_1}{d_0}\right), \qquad n > 3;$$
$$0 < x < 2d_1.$$

Dalla (18) poi, se $\alpha \geq 0$, si ricava subito

$$-(\alpha+1,\ n)\frac{17n+3}{3(n-1)} < L_u^{(\alpha)}(x) < (\alpha+1,\ n)\frac{5n-1}{n-1}, \quad n > 3,$$
$$0 < x < 2d_1.$$