Bollettino Unione Matematica Italiana

Bruno Bazzanella

La teoria della materia e gli spinori.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.1, p. 59–60.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_1_59_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

La teoria della materia e gli spinori.

Nota di Bruno Bazzanella † (a Milano)

Sunto. - *L'Autore dimostra che la nuova teoria di* Einstein *della materia, la teoria di* Kaluza *e la teoria degli spinori nello spazio a* $2\nu+1$ *dimensioni derivano tutte da un unico sistema di equazioni di* Pfaff *e pone la base per una teoria generale della materia che comprenda integralmente le teorie suddette.*

Sia $g_{\underline{ik}}$ il tensore simmetrico fondamentale della metrica.

Le componenti controvarianti e covarianti dei differenziali delle coordinate sono legate dalle relazioni:

$$dx_i = g_{\underline{ik}}\, dx^k \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{1}$$

Alle quattro relazioni suddette va aggiunta la seguente relativa alla distanza infinitesima spazio–tempo:

$$(dx^0)^2 + dx^k\, dx_k = 0. \tag{2}$$

Le relazioni (1) e (2) possono sostituirsi con le seguenti:

$$\Delta\eta_i = \xi_0\, dx_i - \xi_i\, dx^0 + \xi_{ik}\, dx^k = 0 \quad (\xi_{ik} = -\xi_{ki}) \tag{3}$$

$$\Delta\eta_0 = \xi_0\, dx^0 + \xi_k\, dx^k \qquad = 0. \tag{4}$$

Le dx soddisfando ad esse, verificano anche la (2) come è facile constatare. Le ξ sono componenti di uno spinore il quale può essere completato in tutte le sue componenti a mezzo delle note relazioni (¹)

$$\xi_0\, \xi_{ijk} = \xi_i\, \xi_{jk} - \xi_j\, \xi_{ik} + \xi_k\, \xi_{ij}$$

$$\xi_0\, \xi_{\underline{ij}kh} = \xi_{ijk}\, \xi_h + \xi_{jk}\, \xi_{ih} + \xi_{ki}\, \xi_{jh}\,.$$

Riscrivo le equazioni (3) e (4), esprimendo però nella prima le componenti covarianti a mezzo di quelle controvarianti e del tensore fondamentale:

$$\Delta\eta_i = \xi_0\, g_{\underline{ik}}\, dx^k - \xi_i\, dx^0 + \xi_{ik}\, dx^k = 0 \tag{3'}$$

$$\Delta\eta_0 = \xi_k\, dx^k + \xi_0\, dx^0 \qquad = 0. \tag{4'}$$

Nelle espressioni precedenti ho supposte nulle le $\Delta\eta_i$ e $\Delta\eta_0$, ma

(¹) E. Cartan, *Leçons sur la theorie des spineurs,* Paris 1938.

volendo ottenere una espressione più generale della (2) occorrerà considerarle diverse da zero.

Poste poi nelle (3′) e (4′) le $\xi_i = 0$, il determinante dei coefficienti delle dx è il determinante del quarto ordine

$$| \xi_0 \underline{g_{ik}} + \xi_{ik} |$$

in tutto analogo al determinante adottato da EINSTEIN come base della sua recentissima teoria.

Ponendo invece $\xi_{ik} = 0$ il determinante dei coefficienti delle dx^k è quello del quinto ordine adottato come base della teoria di KALUZA [2] e delle teorie da essa derivate:

$$| \xi_0 \underline{g_{11}} \xi_0 \underline{g_{12}} \xi_0 \underline{g_{13}} \xi_0 \underline{g_{14}}, - \xi_1 |$$

È da notare che dallo stesso sistema di equazioni si ricavano altri due determinanti, il primo

$$(5) \qquad | 0, \xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{14}, - \xi_1 |$$

ed in fine il determinante (posto $g_{ik} = \xi_0 \underline{g_{ik}} + \xi_{ik}$)

$$(6) \qquad | g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}, - \xi_1 |$$

Entrambi questi ultimi potrebbero a mio avviso servire di base ad una teoria della materia.

Mi sembra che quanto da me rilevato dimostri l'esistenza di uno stretto legame tra la teoria di KALUZA, la teoria di EINSTEIN e la teoria degli spinori, dato che le equazioni (3) e (4) non sono altro che le equazioni di partenza per quest'ultima teoria nello spazio a $2v + 1$ dimensioni.

Uno studio completo del problema della materia dovrebbe a mio avviso considerare tutte le componenti dello spinore e quindi dovrebbe prendere come base il determinante (6) e considerare lo spazio proiettivo.

Le soluzioni di KALUZA e di EINSTEIN riguardano due casi particolari: il primo considera nulla la componente del secondo ordine antisimmetrica, ed il secondo considera nulla la componente vettoriale.

Ritengo che quanto ho esposto potrà anche facilitare la comprensione del più profondo significato delle attuali teorie.

Lo studio del caso generale risultante dal determinante (6) mi propongo di svolgerlo in altra prossima pubblicazione [3].

[2] Th. KALUZA, *Zum Unitätsproblem der Physik*, « Sitz. Ber. Preuss. Ak. Wiss », (1921) pp. 966-972.

[3] N.d.R. Purtroppo l'Autore della Nota è mancato ai vivi il 9 aprile 1953.