Bollettino
Unione Matematica Italiana

Francesco Speranza

Sulle trasformazioni puntuali fra spazi proiettivi sovrapposti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.1, p. 61–68.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_1_61_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Sulle trasformazioni puntuali fra spazi proiettivi sovrapposti.

Nota di FRANCESCO SPERANZA (a Bologna)

Sunto. - *Come il paragrafo 1.*

1. Nella presente Nota viene studiata una trasformazione puntuale fra due spazi lineari S_r, ad r dimensioni, sovrapposti, nell'intorno di una coppia regolare A, $\bar{A}$ di punti corrispondenti distinti, dal punto di vista della geometria proiettiva. Nei nn. 2, 3, 4 viene considerato il caso generale, nel quale, per la determinazione di un riferimento intrinseco, basta l'intorno del 1° ordine. Nel n. 5 viene poi considerato il caso in cui la proiettività subordinata dalla trasformazione fra le stelle A, $\bar{A}$ è una prospettività, e si determina un riferimento intrinseco, ricorrendo all'intorno del 2° ordine [1].

In una successiva Nota verranno studiati i numerosi casi particolari qui omessi.

2. Sia T una trasformazione puntuale fra due S_r sovrapposti, e sia A, $\bar{A}$ una coppia regolare di punti corrispondenti. T subordina fra le stelle Σ_{r-1}, $\bar{\Sigma}_{r-1}$ di centri A, $\bar{A}$ un'omografia Ω. Indicata con S_1 la retta $A\bar{A}$, considero le rette $\Omega^{-1}S_1$ ed ΩS_1, appartenenti ad A e $\bar{A}$ rispettivamente; suppongo $\Omega^{-1}S_1 \neq S_1$; ne segue $\Omega S_1 \neq S_1$.

$\Omega^{-1}S_1$ ed S_1 (ed analogamente ΩS_1 ed S_1) hanno in comune il punto $A(\bar{A})$; lo spazio congiungente ha dimensione due, e lo indico con $S_2(\bar{S}_2)$. Sia S_2 che $\bar{S}_2$ appartengono ad entrambe le stelle Σ; inoltre $\Omega S_2 = \bar{S}_2$. Considero i piani $\Omega^{-1}S_2$ ed $\Omega\bar{S}_2$ appartenenti ad A, $\bar{A}$ rispettivamente; suppongo $\Omega^{-1}S_2 \neq S_2$, da cui segue: $S_2 \neq \bar{S}_2$; $\bar{S}_2 \neq \Omega\bar{S}_2$. S_2 ed $\Omega^{-1}S_2$ ($\bar{S}_2$ e $\Omega\bar{S}_2$) hanno in comune $\Omega^{-1}S_1(\Omega S_1)$; gli spazi congiungenti saranno $S_3(\bar{S}_3)$. Essi appartengono ad entrambe le stelle Σ.

Posso, con questo metodo, definire due successioni di spazi, tali che S_k ed $\bar{S}_k$ appartengano ad entrambe le stelle Σ (in quanto contengono S_{k-1} ed $\bar{S}_{k-1}$ rispettivamente); $\Omega^{-1}S_k$ ed S_k ($\Omega\bar{S}_k$ ed $\bar{S}_k$) hanno in comune $\Omega^{-1}S_{k-1}$ ($\Omega\bar{S}_{k-1}$). Supposto che $\Omega^{-1}S_k \neq S_k$; $\Omega\bar{S}_k \neq$

[1] Per lo studio di una trasformazione puntuale fra spazi lineari, si veda: M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari. I. Intorno del 2° ordine. II. Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci. III. Trasformazioni cremoniane osculatrici*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. (8) **4**, 55-61, 192-196, 295-303 (1948).

$\neq S_k$, sono definiti gli spazi $S_{k+1} \equiv | S_k, \Omega^{-1} S_k |$ [2], $\bar{S}_{k+1} | \bar{S}_k, \Omega \bar{S}_k |$. Le successioni terminano con S_{r-1}, $\bar{S}_{r-1}$. Si noti che $\Omega^{-1} S_i$ ed $\Omega^{-1} S_j$ si appartengono, come pure $\Omega \bar{S}_i$ ed $\Omega \bar{S}_j$.

Considero gli $r+1$ iperpiani

$$S^{(1)}_{r-1} \equiv \Omega^{-1} S_{r-1} \qquad S^{(2)}_{r-1} \equiv | \Omega^{-1} S_{r-2}, \bar{A} |$$

$$S^{(3)}_{r-1} \equiv | \Omega^{-1} S_{r-3}, \Omega \bar{S}_1 | \ldots S^{(k)}_{r-1} \equiv | \Omega^{-1} S_{r-k}, \Omega \bar{S}_{k-2} | \ldots$$

$$S^{(r)}_{r-1} \equiv | A, \Omega \bar{S}_{r-2} | \qquad S^{(r+1)}_{r-1} \equiv \Omega \bar{S}_{r-1}.$$

Assumo l'iperpiano $S^{(k)}_{r-1}$ come faccia $x_k = 0$ della piramide fondamentale, che resta così individuata. I punti A, $\bar{A}$ hanno coordinate $(0, \ldots, 0, 1)$ e $(1, 0, \ldots, 0)$ rispettivamente. Se indico con $X_k = \dfrac{x_k}{x_{r+1}}$, $\bar{X}_k = \dfrac{\bar{x}_k}{\bar{x}_1}$ le coordinate non omogenee di punto in S_r ed $\bar{S}_r$ rispettivamente, le equazioni di T possono scriversi:

$$\bar{X}_i = F_i(X_k) \qquad (2 \leq i \leq r+1). \tag{1}$$

Mediante gli sviluppi in serie di Mac Laurin dei secondi membri troncati ai termini di 1° grado, si hanno le equazioni, in coordinate omogenee, di Ω:

$$\bar{X}_i = \sum_{1}^{r}{}_k\, a^k_{i-1} X_k \qquad (2 \leq i \leq r+1) \tag{2}$$

Affinchè la piramide fondamentale coincida con quella or ora individuata, basta tener presente che la S_1 ha equazioni: $x_2 = x_3 = \ldots = x_r = 0$, mentre la $\Omega^{-1} S_1$ e la $\Omega \bar{S}_1$ hanno equazioni $x_1 = x_2 = \ldots = x_{r-1} = 0$, $x_3 = x_4 = \ldots = x_{r+1} = 0$; esse infatti appartengono agli spazi $\Omega^{-1} S_i$ ed $\Omega \bar{S}_j$ rispettivamente. In generale le equazioni di $\Omega^{-1} S_k$, S_k, $\bar{S}_k$, $\Omega \bar{S}_k$ sono rispettivamente

$$x_1 = \ldots x_{r-k} = 0;\ x_2 = \ldots = x_{r-k+1} = 0;\ x_{k+1} = \ldots = x_r = 0;\ x_{k+2} = \ldots = x_{r+1} = 0$$

Seguono le relazioni

$$a_i^k = \delta_i^k a_k \qquad (1 \leq i,\ k \leq r) \tag{3}$$

(dove $\delta_i^k = 1$, se $i = k$; $= 0$ se $i \neq k$).

Le equazioni di T diventano

$$\bar{X}_{k+1} = a_k X_k + [2] \qquad (1 \leq k \leq r) \tag{4}$$

[2] Con questa notazione intendo lo spazio congiungente S_k ed $\Omega^{-1} S_k$.

3. Per determinare il punto unità, considero le ∞^r omografie tangenti a T in $(A, \bar{A})$, le quali in generale posseggono $r+1$ punti uniti. Questi segnano una g_{r+1}^r sulla C^r razionale normale, luogo delle intersezioni di rette delle stelle Σ_{r-1}, $\bar{\Sigma}_{r-1}$ corrispondenti in Ω ed incidenti ([3]). Tale g_{r+1}^r ha $r+1$ punti $(r+1)$-pli U_i, corrispondenti ad altrettante omografie r volte paraboliche. Assumo uno di questi punti come punto unità; il sistema di riferimento è così determinato. Si noti che, mentre la piramide fondamentale è individuata senz'ambiguità, il punto unità — e quindi anche il riferimento — può scegliersi nel modo indicato in $r+1$ modi equivalenti.

Le equazioni delle omografie tangenti sono:

$$(5) \qquad \begin{cases} \rho\bar{x}_1 = \sum_1^r{}_i \lambda_i x_i + x_{r+1} \\ \rho\bar{x}_k = a_{k-1}x_{k-1} \qquad\qquad (2 \leq k \leq r+1) \end{cases}$$

di equazioni caratteristiche

$$(6) \qquad \rho^{r+1} - \sum_1^r{}_k\Big(\lambda_k \prod_1^{k-1}{}_j a_j\Big)\rho^{r-k+1} - \prod_1^r{}_j a_j = 0.$$

Indicata con ρ_i una delle radici $(r+1)$-esime di $-\prod_1^r a_j$, per le $r+1$ omografie r volte paraboliche l' equazione caratteristica diviene

$$(\rho + \rho_i)^{r+1} = 0$$

e quindi dev'essere

$$\lambda_h = -\binom{r+1}{i}\frac{\rho_i^{\,h}}{\prod_1^{h-1} a_j}.$$

I punti U_i hanno quindi coordinate non omogenee

$$X_k = (-1)^{r-k+1}\frac{\rho_i^{\,r-k+1}}{\prod_k^r a_j}.$$

Assumendo il punto unità in uno dei punti U_i si ottiene $a_k = \rho_i = (-1)^r$; le *equazioni canoniche* di T sono perciò

$$(7) \qquad \bar{X}_k = (-1)^r X_k + [2] \ ([4]).$$

([3]) BERTINI, *Geometria proiettiva degli iperspazi* (Principato, Messina) pag. 345 e segg. (1923).

([4]) La piramide fondamentale è strettamente legata alla C^r. Infatti le equazioni di questa (che si ottengono senza difficoltà scrivendo la condizione

4. *L'intorno del 1° ordine è sufficiente a fissare il riferimento;* d'altra parte esso non ha alcun invariante proiettivo. Gli $\frac{r^3+r^2}{2}$ coefficienti del 2° ordine sono invece tutti invarianti; si noti che per $r=2$ ed $r=3$ fra le rette caratteristiche non sussiste alcun legame (per $r=3$ le coordinate di dette rette possono prendersi per dare un significato geometrico a 14 espressioni nei 18 coefficienti del 2° ordine; altre 4 espressioni si ottengono considerando ad es. le tangenti asintotiche delle calotte σ_2, σ_2' corrispondenti in T^{-1} alle calotte dei piani $x_2=0$, $x_3=0$ di centro $\bar{A}$) [5]. Per $r\geq 4$, invece, le coordinate delle rette caratteristiche sono $(r-1)(2^r-1)>$ $>\frac{r^3+r^2}{2}$ e quindi *fra tali coordinate sussistono delle relazioni* a priori. Ciò accade anche se l'intorno del 1° ordine è particolare.

5. Dei casi particolari in relazione all'intorno del 1° ordine di T mi limiterò qui a trattare quello di una coppia $(A, \bar{A})$ di punti corrispondenti, tale che l'omografia Ω è una prospettività.

Assumo i vertici $(0, \ldots, 0, 1)$ e $(1, 0, \ldots, 0)$ in A e $\bar{A}$, e i rimanenti in altrettanti punti dell' S_{r-1} di prospettività. Alle equazioni di Ω, che hanno la forma (2), debbo imporre: che la retta $x_2=$ $=\ldots=x_r=0$ sia unita; che alla retta $x_1=\ldots=x_{j-1}=x_{j+1}=\ldots=$ $=x_r=0$ corrisponda in Ω la retta $x_2=\ldots=x_{j-1}=x_{j+1}=\ldots=x_{r+1}=$ $=0$; ottengo

$$a^k_{i-1}=\delta^k_i\, a_k \qquad (1\leq i-1,\ k\leq r)$$

e quindi le equazioni di Ω sono del tipo

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} \bar{X}_k=a_k X_k \\ \bar{X}_{r+1}=a_{r+1} X_1 \end{cases} \qquad (2\leq k\leq r).$$

d'incidenza per due rette appartenenti ai sistemi Σ) sono nel sistema fissato:

$$x_i=\lambda^{r-i+1}\mu^{i-1} \qquad (1\leq i\leq r+1)$$

dove λ e μ sono parametri omogenei. L' S_k osculatore a C^r in A ha equazioni: $x_1=\ldots=x_{r-k}=0$, e coincide quindi con $\Omega^{-1}S_k$. Analogamente l' S_k osculatore a C^r in $\bar{A}$ è $\Omega\bar{S}_k$.

[5] Significati geometrici di altre espressioni si ottengono considerando le *omografie caratteristiche,* che subordinano su una qualsiasi r-pla di rette caratteristiche le relative proiettività caratteristiche del VILLA [M. VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi,* Acc. Ital. Rend., (7) 3, 710-724, (1942)]; oppure l'*omografia locale* [E. ČECH, *Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces.* I. « Čas. Pro Pěst. Mat. a Fys. » 74, pp. 32- 48].

Le ∞^r omografie tangenti subordinano sulla $A\bar{A}$ ∞^1 proiettività, i cui punti uniti segnano una g_2^1 sulla retta. I punti doppi della serie corrispondono a due proiettività paraboliche. Le equazioni delle ∞^1 proiettività sono

$$\left\{\begin{aligned} \rho\bar{x}_1 &= \lambda x_1 + x_{r+1} \\ \rho\bar{x}_{r+1} &= a_{r+1}x_1 \end{aligned}\right.$$

e le proiettività paraboliche corrispondono ai valori $\lambda = \pm 2\sqrt{-a_{r+1}}$ ed i loro punti uniti U_i hanno coordinate

$$X_1 = \frac{\pm 1}{\sqrt{-a_{r+1}}}\,;\; X_2 = \ldots = X_r = 0.$$

Assumo uno di questi punti come punto $(1, 0, \ldots, 0, 1)$; si ha

$$a_{r+1} = -1.$$

Inoltre, prese due rette corrispondenti in Ω

$$X_1 : X_2 : \ldots : X_r = \lambda_1 : \lambda_2 : \ldots : \lambda_r\,;\; X_2 : X_3 : \ldots : X_r : X_{r+1} = a_2\lambda_2 : a_3\lambda_3 : \ldots : a_r\lambda_r : -\lambda_1$$

la condizione d'incidenza è espressa dall'annullarsi della matrice

$$\left\|\begin{matrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_{r-1} & \lambda_r \\ a_2\lambda_2 & a_3\lambda_3 & \ldots & a_{r-1}\lambda_{r-1} & a_r\lambda_r \end{matrix}\right\|$$

e affinchè sia identicamente soddisfatta, dev'essere

$$a_2 = a_3 = \ldots = a_r = \alpha.$$

Le due rette s'incontrano nel punto di coordinate non omogenee $\left(-\alpha, -\alpha\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, -\alpha\frac{\lambda_3}{\lambda_1}, \ldots, -\alpha\frac{\lambda_k}{\lambda_1}, \ldots, -\alpha\frac{\lambda_r}{\lambda_1}\right)$, e l'equazione dell'iperpiano di prospettività è $X_1 = -\alpha$.

Se K è l'intersezione di tale S_{r-1} con $A\bar{A}$, si ha

$$(A\bar{A}KU_i) = (0, \infty, -\alpha, \pm 1) = \mp\alpha.$$

Vale la seguente proprietà: *le omografie tangenti hanno tutte un* S_{r-2} *di punti uniti; fra di esse ve ne sono due paraboliche, ed un'omologia, generale se* $\alpha^2 \neq 1$, *speciale se* $\alpha^2 = 1$, *di caratteristica* α^{-2}.

Le ∞^r omografie tangenti hanno equazione

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho\bar{x}_1 &= \sum_1^r \lambda_i x_i + x_{r+1} \\ \rho\bar{x}_k &= \alpha x_k \qquad\qquad (2 \leq k \leq r) \\ \rho\bar{x}_{r+1} &= -x_1 \end{aligned}\right.$$

e le equazioni caratteristiche sono

$$A(\rho) \equiv (\alpha - \rho)^{r-1}(\rho^2 - \lambda_1\rho + 1) = 0.$$

La soluzione $\rho = \alpha$ abbassa a 2 la caratteristica del determinante A (e solo α può abbassarla); le omografie hanno perciò tutte un S_{r-2} di punti uniti, di equazioni: $x_1 = -\alpha x_{r+1}$, $\sum_2^r \lambda_i x_i + (\lambda_1 - \alpha)x_{r+1} = 0$; e, indicata con ρ_j una delle radici dell'equazione quadratica, i punti uniti U_j^* esterni ad S_{r-2} hanno coordinate $(-\rho_j, 0, \dots, 0, 1)$, e quindi gl'invarianti valgono $(A\bar{A}U_j^*K) = \frac{\rho_j}{\alpha}$.

Per $\lambda_1 = \pm 2$, $U_1^* \equiv U_2^* = U_1$, e quindi le omografie hanno carattere parabolico; gli invarianti valgono $\frac{\lambda_1}{2\alpha}$.

Per $\lambda_1 = \alpha + \frac{1}{\alpha}$, uno dei punti U_j^* cade in S_{r-2}, e l'omografia ha carattere speciale; si ha un'omologia quando la caratteristica di $A(\alpha)$ è 1, cioè quando $\lambda_k = 0$ $(k \geq 2)$. Le equazioni dell'omologia tangente sono quindi

$$\begin{cases} \rho\bar{x}_1 = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)x_1 + x_{r+1} \\ \rho\bar{x}_k = \alpha x_k \\ \rho\bar{x}_{r+1} = -x_1 \end{cases}$$

ed essa è generale se $\alpha^2 \neq 1$, speciale se $\alpha^2 = 1$; l'iperpiano d'omologia ha equazione $X_1 = -\alpha$ ed è perciò l'iperpiano di prospettività; il centro U ha coordinate $\left(-\frac{1}{\alpha}, 0, \dots, 0, 1\right)$ e quindi la caratteristica vale $(A\bar{A}UK) = \alpha^{-2}$.

Le equazioni di T hanno la forma

$$\begin{cases} \bar{X}_k = \alpha X_k + \Sigma_{ij} a_{(k)}^{ij} X_i X_j + [3] \\ \bar{X}_{r+1} = -X_1 + \Sigma_{ij} a_{(r+1)}^{ij} X_i X_j + [3] \end{cases}$$

essendo le Σ estese a tutte le combinazioni con ripetizione di classe 2 degli indici i, j.

Per terminare di fissare il riferimento, ricorro all'intorno del 2° ordine. Suppongo che da A escano almeno r rette caratteristiche distinte fra di loro e dalla $A\bar{A}$; le assumo come rette

(10) $$x_1 = \dots = x_{k-1} = x_{k+1} = \dots = x_r = 0 \qquad (2 \leq k \leq r)$$

(10') $$x_1 = \dots = x_r;$$

il riferimento è cosí fissato. Affinchè la (10) sia caratteristica, deve annullarsi la matrice

$$\begin{Vmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha & \dots & 0 \\ a^{kk}_{(2)} & \dots & a^{kk}_{(k-1)} & a^{kk}_{(k)} & \dots & a^{kk}_{(r+1)} \end{Vmatrix}$$

da cui

(11) $$a^{kk}_{(h)} = \delta^k_h a_k \qquad (2 \leq k, h \leq r+1).$$

Affinchè la (10′) sia caratteristica, deve annullarsi la matrice

$$\begin{Vmatrix} \alpha & \dots & -1 \\ \Sigma\, a^{ij}_{(2)} & \dots & \Sigma\, a^{ij}_{(r+1)} \end{Vmatrix}$$

cioè

(11′) $$\Sigma\, a^{ij}_{(2)} = \dots = \Sigma\, a^{ij}_{(r)} = -\alpha\, \Sigma\, a^{ij}_{(r+1)}.$$

Quindi la forma canonica delle equazioni di T è

(12) $$\begin{cases} \bar{X}_k = \alpha X_k + b_k X_1^2 + a_k X_k^2 + \Sigma_{(ij)} a^{ij}_{(k)} X_i X_j + [3] \\ \bar{X}_{r+1} = -X_1 + b_{r+1} X_1^2 \qquad + \Sigma_{(ij)} a^{ij}_{(r+1)} X_i X_j + [3] \end{cases}$$

essendo i coefficienti $a^{ij}_{(k)}$ legati dalle (11′); le $\Sigma_{(ij)}$ sono estese a tutte le combinazioni *semplici* degli indici ij.

Si hanno quindi $\dfrac{r^3 - r^2 + 2r}{2}$ invarianti al 2° ordine. Considerate le restanti $2^r - r - 1$ rette caratteristiche, le loro coordinate, in numero di $(r-1)(2^r - r - 1)$, danno il significato di detti invarianti (per $r \geq 5$). Si possono pure considerare le $\binom{2^r - 1}{r}$ omografie caratteristiche, in particolare quella che subordina sulle r rette caratteristiche considerate le proiettività caratteristiche [6].

Determino quest'ultima nel caso $r = 3$. Considerata, ad es., la coppia di rette $x_1 = x_2 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$, l'equazione di una proiettività che faccia corrispondere A ed $\bar{A}$ è

$$\bar{z} = \frac{\rho z}{\sigma z + 1} = \rho z - \rho\sigma z^2 + [3]$$

dove

$$z = \frac{x_3}{x_4}, \qquad \bar{z} = \frac{\bar{x}_3}{\bar{x}_1}.$$

Affinchè essa sia caratteristica, dev'essere $\rho = \alpha$; $\sigma = -\dfrac{a^{33}_{(3)}}{\alpha}$, e

(6) Cfr. la nota (5).

quindi l'equazione diviene

$$-\frac{a^{33}_{(3)}}{\alpha} z\bar{z} + \bar{z} - \alpha z = 0.$$

Una generica omografia tangente subordina sulle rette in questione la proiettività

$$\lambda_3 z\bar{z} - \alpha z + \bar{z} = 0,$$

come risulta dalla (9) per $r = 3$, e, affinchè questa sia caratteristica, dev' essere $\lambda_3 = -\frac{a^{33}_{(3)}}{\alpha}$. Analogamente

$$\lambda_2 = -\frac{a^{22}_{(2)}}{\alpha} \qquad \lambda_1 = \frac{-\sum\limits_{ij} a^{ij}_{(2)} + a^{22}_{(2)} + a^{33}_{(3)}}{\alpha}.$$