S. Melone

Sull interazione di masse in movimento.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.1, p. 68–74.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_1_68_0>

Sulla interazione di masse in movimento.

Nota di S. MELONE (a Bari)

Sunto. - *Si dimostra che, quando una massa è in movimento, viene generato nello spazio un campo vettoriale* $\overrightarrow{K}$ *(campo cinematico), che dipende dalla velocità e dalla densità della massa. Tenendo presente la profonda analogia che esiste tra l'equazione ottenuta per il campo cinematico e quella che si ha per il campo magnetico generato da una carica in movimento, si è pensato di scrivere per il campo gravitazionale, una equazione analoga a quella che si ha per il campo elettrico. Considerando poi lo spazio tempo come sede dei campi gravitazionale e cinematico, si sono ottenute quattro equazioni differenziali, che li caratterizzano completamente. Da queste si deduce che il campo gravitazionale cinematico si propaga con la velocità della luce e che tra due masse in movimento si esercita una forza che è quella di Newton corretta però con l'aggiunta di un termine molto piccolo (per la presenza del fattore* $1/c^2$*) e dipendente dalla velocità delle masse. Quando esse sono in quiete la loro interazione si riduce a quella newtoniana, che perciò può considerarsi come un caso particolare statico.*

1. Si abbia una massa m distribuita con continuità nel volume S e in quiete rispetto ad un sistema di riferimento solidale con le stelle fisse. Ad ogni punto dello spazio è associato il vettore $\overrightarrow{G}$, campo gravitazionale, le cui proprietà sono riassunte dalle equazioni:

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{G} = -4\pi f \mu \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{G} = 0 \tag{2}$$

ove f è la costante di gravitazione universale e μ è la massa specifica, definita da

$$\mu = \frac{dm}{ds}.$$

Se ora supponiamo che la massa m sia in movimento, detta $\vec{v}$ la velocità dell'elemento dm, dobbiamo, accanto alle equazioni (1) e (2), considerare l'equazione della continuità:

$$\operatorname{div}(\mu \vec{v}) = -\frac{\partial \mu}{\partial t}. \tag{3}$$

Deriviamo la (1) rispetto al tempo:

$$\operatorname{div}\frac{\partial \vec{G}}{\partial t} = -4\pi f \frac{\partial \mu}{\partial t}$$

e moltiplichiamo la (3) per $4\pi f$

$$\operatorname{div}(4\pi f \mu \vec{v}) = -4\pi \frac{\partial \mu}{\partial t}.$$

Sottraendo membro a membro, otteniamo:

$$\operatorname{div}\left(4\pi f \mu \vec{v} - \frac{\partial \vec{G}}{\partial t}\right) = 0$$

l'integrale generale di questa equazione è data da:

$$\operatorname{rot}\vec{K} = 4\pi f \mu \vec{v} - \frac{\partial \vec{G}}{\partial t} \tag{4}$$

ove $\vec{K}$ è un vettore generico. Tale vettore, diviso per $4\pi f$, cioè $\frac{\vec{K}}{4\pi f}$, ha il carattere di un momento sferico di quantità di moto.

Si noti che, quando $\vec{G}$ è indipendente dal tempo, $\vec{K}$ dipende dalla velocità $\vec{v}$ e dalla massa specifica μ. Per questa ragione chiameremo *campo cinematico* l'insieme dei punti dello spazio associati al vettore $\vec{K}$. Sicchè, quando una massa è in movimento, occorre considerare, accanto al campo gravitazionale $\vec{G}$, anche il campo cinematico $\vec{K}$, legati dalle relazioni

$$\operatorname{div}\vec{G} = -4\pi f \mu; \qquad \operatorname{rot}\vec{K} = 4\pi f \mu \vec{v} - \frac{\partial \vec{G}}{\partial t}.$$

Queste equazioni però non definiscono completamente i vettori $\vec{G}$ e $\vec{K}$. Viene quindi da chiedersi quali debbano essere le ulteriori condizioni da imporre, per togliere loro ogni indeterminazione. Se consideriamo che il campo gravitazionale sia ancora conservativo, come nel caso della massa in quiete, cioè se pensiamo che valga ancora la (2), allora ricadiamo nel caso classico e, implicitamente, riconfermiamo la legge di NEWTON per l'azione di due punti materiali in moto. Ma è noto che tale legge non riesce a spiegare perfettamente tutti i fenomeni astronomici e che la teoria della Relatività generale di EINSTEIN apporta una lievissima correzione alla meccanica di NEWTON in modo da migliorare in parte l'accordo tra la teoria e le osservazioni astronomiche [1]. Vogliamo qui vedere se è possibile trovare una soluzione del problema, ponendoci al di fuori di tale teoria. Allo scopo supponiamo di generalizzare la (2) ponendo

$$\text{rot}\,\vec{G} = h\frac{\partial \vec{K}}{\partial t} \quad [2] \tag{5}$$

ove h è una costante indeterminata.

2. Occorre ora cercare il valore di h e la ulteriore condizione da imporre a $\vec{K}$. Per fare ciò basta supporre, conformemente alle idee dalla Relatività ristretta, che il campo gravitazionale-cinematico, abbia la sua effettiva sede nello spazio pseudoeuclideo quadridimensionale di metrica pseudopitagorica:

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \tag{6}$$

ove $x_0 = ct$ e x_1, x_2, x_3, sono le tre coordinate cartesiane ortogonali (c essendo la velocità della luce). In questo spazio dovremo rappresentare il campo gravitazionale-cinematico mediante relazioni che abbiano carattere invariantivo rispetto alle trasformazioni di LORENTZ. Basta allora introdurre tensori spazio-temporali legati da relazioni che traducono le equazioni (1), (4), (5). Consideriamo dunque il tensore doppio emisimmetrico $\Gamma_{\alpha\beta}$, le cui componenti sono legate a quelle dei due vettori $\vec{G}$ e $\vec{K}$ nel modo seguente:

[1] Infatti i disaccordi più notevoli tra la teoria newtoniana e le osservazioni sono: gli spostamenti del perielio di Mercurio, del nodo di Venere, del perielio di Marte (probabile); l'accelerazione secolare della luna e l'accelerazione della cometa d'ENCKE (cfr. CHAZY, *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, Gauthier-Villars, p. 183). Di tali disaccordi la teoria della Relatività generale riesce a dare una spiegazione perfetta solo per lo spostamento del perielio di Mercurio.

[2] Tale relazione ci è suggerita dalla profonda analogia formale che esiste tra il campo gravitazionale $\vec{G}$ ed il campo elettrico $\vec{E}$ e tra il campo cinematico $\vec{K}$ e il campo magnetico $\vec{H}$.

$$\Gamma_{\alpha\beta} = \left\{ \begin{array}{cccc} 0 & -G_1 & -G_2 & -G_3 \\ G_1 & 0 & -\frac{K_3}{c} & \frac{K_2}{c} \\ G_2 & \frac{K_3}{c} & 0 & -\frac{K_1}{c} \\ G_3 & -\frac{K_2}{c} & \frac{K_1}{c} & 0. \end{array} \right. \tag{7}$$

Consideriamo inoltre il quadrivettore l^α definito da

$$l^0 = \mu\,; \qquad l^i = \mu\,\frac{v^i}{c} \qquad (i = 1,\, 2,\, 3) \tag{8}$$

che rappresenta la distribuzione della materia nello spazio e nel tempo.

Le equazioni (1) e (4) sono allora riassunte dalla equazione tensoriale:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{/\beta} = -\,4\pi l_\alpha \tag{9}$$

mentre per l'equazione (5) si ottiene:

$$\varepsilon^{\delta\gamma\alpha\beta}\,\Gamma_{\alpha\beta/\gamma} = 0. \tag{10}$$

In tal modo rimane determinata la costante h, che prende il valore $1/c^2$, e rimane implicitamente imposta anche una ulteriore condizione al vettore $\vec{K}$, che finisce così per essere completamente determinato. Infatti la (10) dà origine a delle equazioni scalari che, nel riferimento cartesiano, diventano:

$$-\frac{\partial G_1}{\partial x_2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial K_3}{\partial t} + \frac{\partial G_2}{\partial x_1} = 0$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial K_3}{\partial x_3} - \frac{1}{c}\frac{\partial K_1}{\partial x_1} - \frac{1}{c}\frac{\partial K_2}{\partial x_2} = 0$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial K_1}{\partial t} + \frac{\partial G_3}{\partial x_2} - \frac{\partial G_2}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial G_3}{\partial x_1} - \frac{\partial G_1}{\partial x_3} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial K_2}{\partial t} = 0$$

Ora effettivamente la prima, la terza e la quarta delle precedenti equazioni sono le proiezioni sugli assi coordinati dell'equazione

$$\operatorname{rot} \vec{G} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{K}}{\partial t} \tag{5'}$$

mentre la seconda può scriversi sotto forma

$$\operatorname{div} \vec{K} = 0. \tag{11}$$

Il confronto della (5') con la (5) ci permette di assegnare alla costante h, come è stato detto, il valore

$$h = \frac{1}{c^2}$$

mentre la (11), imponendo la condizione di solenoidalità al campo cinematico, finisce per togliergli ogni arbitrarietà. Pertanto nello spazio ordinario il campo gravitazionale-cinematico viene completamente descritto dalle equazioni

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} \vec{G} = -4\pi\,\mu & \operatorname{div} \vec{K} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{G} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{K}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{K} = 4\pi f \mu\, \vec{v} - \dfrac{\partial \vec{G}}{\partial t} \end{array} \tag{12}$$

le quali, come abbiamo visto, nello spazio-tempo sono riassunte dalle due equazioni

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{/\beta} = -\,4\pi f l_\alpha\,; \qquad \varepsilon^{\delta\gamma\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta/\gamma} = 0. \tag{13}$$

Esse possono considerarsi come la estensione delle equazioni (1) e (2) al tensore gravitazionale-cinematico. La prima, infatti, esprimendo che la divergenza del tensore gravitazionale-cinematico è proporzionale alla distribuzione della materia, è analoga alla (1); mentre la seconda, esprimendo la irrotazionalità del tensore gravitazionale-cinematico, è l'analoga della (2). In altri termini le due equazioni (13) traducono per il campo gravitazionale-cinematico nello spazio-tempo le stesse proprietà di cui gode il campo gravitazionale nello spazio ordinario.

3. Dalla condizione di solenoidalità trovata per il campo cinematico si deduce che è possibile trovare un vettore $\vec{P}$ (potenziale vettore) per cui si abbia

$$\vec{K} = \operatorname{rot} \vec{P}. \tag{14}$$

Tenendo presente la terza delle equazioni (12), si ha

$$\operatorname{rot}\left(\vec{G} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) = 0$$

e quindi possiamo introdurre uno scalare R (potenziale scalare), ponendo

$$\vec{G} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -\operatorname{grad} R \tag{15}$$

(nel caso statico, $\partial \vec{P}/\partial t = 0$, R si riduce al noto potenziale gravitazionale).

Le equazioni (14) e (15) fanno vedere che il campo gravitazionale e quello cinematico si possono ottenere per semplice derivazione dei potenziali gravitazionali-cinematici $\vec{P}$ e R, i quali, in verità, non sono determinati in modo unico.

Per togliere loro ogni arbitrarietà basta imporre la condizione:

$$\operatorname{div} \vec{P} = \frac{\partial R}{\partial t} \tag{16}$$

che viene suggerita dall'analogia ai potenziali elettro-magnetici.

Dalle equazioni (12) e dalle (14), (15) e (16) si ricavano le altre

$$\Delta_2 \vec{P} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} = -4\pi f \mu \vec{v} \tag{17}$$

$$\Delta_2 R - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = 4\pi f \mu \tag{18}$$

e da queste, in base alla teoria dei potenziàli ritardati, si ottengono le espressioni

$$\vec{P} = f\int \left| \frac{\vec{v}\, dm}{r - \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{c}} \right|_{t-\frac{r}{c}} \quad ; \quad R = -f\int \left[\frac{dm}{r - \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{c}} \right]_{t-\frac{r}{c}} \tag{19}$$

Ove il vettore $\vec{r}$ indica la distanza dell'elemento dm della distribuzione di massa data al punto P in cui si voglion calcolare i potenziali; inoltre i valori delle funzioni integrande che vi figurano vanno presi all'istante $\tau = t - \frac{r}{c}$. Ciò dipende dal fatto che le azioni gravitazionali-cinematiche si trasmettono con la velocità della luce, come si vede dalle equazioni (17) e (18).

Nel caso in cui la massa m in movimento sia distribuita in un dominio spaziale molto piccolo, si può ammettere in via approssimata che le funzioni integrande, che compaiono nelle espressioni dei potenziali, assumano valore costante; per cui i potenziali prendono le forme più semplici:

$$\vec{P} = f\left[\frac{m\vec{v}}{r - \frac{\vec{r}\times\vec{v}}{c}}\right]_{t-\frac{r}{c}} \; ; \qquad R = -f \frac{m}{\left[r - \frac{\vec{r}\times\vec{v}}{c}\right]_{t-\frac{r}{c}}} \tag{20}$$

4. Accanto alla distribuzione di massa m in movimento considerata all'inizio di questo lavoro, consideriamo un'altra distribuzione di massa M, descritta dal vettore quadridimensionale j^α, con

$$j^0 = \rho; \qquad j^i = \rho \frac{u^i}{c} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

ove ρ è la nuova massa specifica e $\vec{u}$ è la nuova velocità dell'elemento dM.

Componiamo ora il tensore $\Gamma_{\alpha\beta}$ col vettore j^α; otteniamo il vettore dello spazio tempo

$$L_\alpha = \Gamma_{\alpha\beta} j^\beta .$$

Nel riferimento cartesiano spaziale esso si scinde in

$$\begin{aligned} L_0 &= -\frac{1}{c}\,\vec{G}\times(\rho\vec{u}) \\ \vec{L} &= \rho\,\vec{G} + \frac{1}{c^2}\,\vec{K}\wedge(\rho\vec{u}) \end{aligned} \tag{21}$$

L_0 è uno scalare e rappresenta la potenza dell'elemento dM nel campo gravitazionale $\vec{G}$, prodotto dalla massa m; il vettore $\vec{L}$ invece rappresenta la forza ponderomotrice cui è sottoposto l'elemento di massa dM da parte della massa m in movimento. In particolare se le distribuzioni di massa date si riducono a due punti materiali A e B di massa rispettivamente m ed M, la forza cui é soggetto il punto B da parte di A, quando ambedue sono in movimento rispetto al sistema di riferimento prescelto, e data da

$$\vec{F} = M\left(\vec{G} - \frac{1}{c^2}\,\vec{u}\wedge\vec{K}\right). \tag{22}$$

Si vede immediatamente che nel caso in cui i due punti stanno in quiete rispetto al sistema di riferimento, la loro interazione si riduce a quella newtoniana. Perciò si può ritenere che la legge di NEWTON sia un caso particolare (statico) della espressione dell'azione che si esercita tra due masse qualsiasi in movimento, azione data dalla (22).