Mario Galli

Il valore delle speculazioni galileiane relative alla forza centrifuga.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.1, p. 77–96.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_1_77_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Il valore delle speculazioni galileiane relative alla forza centrifuga.

Nota di Mario Galli (a Firenze)

Sunto. - *Sottoponendo ad analisi accurata l'opera galileliana si rileva:*

1) *Galileo ha lasciato sulla forza centrifuga solo due teoremi incompiuti. Tuttavia egli ha scoperto un criterio costruttivo matematicamente preciso, dal quale il valore della forza centrifuga è deducibile con la semplice applicazione di elementari teoremi di geometria.*

2) *Galileo sottopone il suo criterio ad una profonda analisi, la quale gli offre la possibilità di giustificare brillantemente la tesi che gli stava tanto a cuore: la matematica è indispensabile ai cultori di filosofia naturale.*

3) *L'incompiutezza dei teoremi galileliani è spiegabile con varie ragioni.*

1. - Introduzione.

Se vogliamo esprimere molto compendiosamente l'opinione comune circa il presente soggetto, potremmo dire così:

a) GALILEO ha dedicato molte pagine alla forza centrifuga (circa una trentina di pagine dei Dialoghi dei Massimi Sistemi). Però non è riuscito ad assegnare la formula che ne precisa il valore.

b) Stando così le cose, i meriti acquisiti da GALILEO con tale trattazione non sono rilevanti.

Secondo storici della scienza poco favorevoli a GALILEO la trattazione non merita maggior considerazione di una buona declamazione oratoria. Nè manca chi crede di riconoscervi degli errori e ammette che i fondamenti di quanto di buono è detto al riguardo sono puramente metafisici.

La prima affermazione, esprimente in sostanza una constatazione di fatto, può essere conceduta in linea di massima. Faremo però una importante e necessaria riserva.

La seconda affermazione è del tutto errata. Il fondamento dell'errore è duplice:

a) In primo luogo chi parla così non ha letto attentamente e diligentemente GALILEO.

b) In secondo luogo si parte da un presupposto teorico molto discutibile. Si giudica GALILEO senza tener conto della situazione storica nella quale egli operava. Ciò apparirà chiaro da quanto diremo in seguito.

Il lettore può subito capire da queste dichiarazioni che noi non intendiamo togliere a HUYGHENS (1) il merito che tutti gli riconoscono, quello cioè di essere stato il primo a determinare il valore esatto della forza centrifuga. Ma non possiamo accettare il falso giudizio, secondo il quale, non essendo GALILEO giunto a tanto, i suoi studi non meritano la massima considerazione.

A proposito di un altro problema affrontato ma non risolto da GALILEO (la determinazione sperimentale della velocità della luce) il più celebre fisico vivente, A. EINSTEIN, dice testualmente (2): « *Galileo è stato il primo a formulare il problema della determinazione della velocità della luce, ma non lo ha risolto. La formulazione di un problema è spesso più importante della sua soluzione, la quale può dipendere unicamente da abilità matematica o sperimentale. Invece sollevare nuove questioni, prospettare nuove possibilità, ri-*

(1) I risultati conseguiti da HUYGHENS sono stati pubblicati senza dimostrazione nel suo famoso « *Horologium oscillatorium* ». Il trattato « *De vi centrifuga* » fu pubblicato postumo nel 1703, ma esso era stato redatto già nel 1659.

(2) A. EINSTEIN, L. INFELD, *The evolution of Physics*, p. 95.

guardare vecchi problemi da nuovi punti di vista richiede immaginazione creatrice e causa reali progressi nella scienza ».

Nel caso attuale GALILEO ha fatto molto di più che porre il problema. Egli è quasi giunto alla sua completa soluzione. Per conseguirla bastava invocare un elementarissimo teorema di geometria. Stando così le cose, il fatto che GALILEO abbia lasciato incompiuto il suo lavoro costituisce un problema storico di eccezionale interesse. Crediamo di averne scoperto la ragione.

I contributi di GALILEO al problema della forza centrifuga possono essere indicati come segue:

1) Egli ha posto un criterio costruttivo matematicamente preciso (per quanto non espresso in formole) dal quale le leggi della forza centrifuga possono essere dedotte facilmente invocando elementari teoremi di geometria.

2) Ha ottenuto un risultato parziale, ma matematicamente preciso, relativamente al valore della forza centrifuga (questo però non pubblicato nei famosi dialoghi).

3) Le sue speculazioni sulla forza centrifuga convergevano essenzialmente ad uno scopo diverso da quello dêlla sua precisa determinazione, la quale probabilmente per questo motivo gli è sfuggita. Tale scopo consisteva essenzialmente nel dimostrare con un esempio idoneo la necessità imprescindibile delle cognizioni matematiche per la risoluzione di importanti questioni di filosofia naturale. Tale compito in quel momento storico era molto più importante ed è assolto da GALILEO egregiamente. Siamo anzi convinti che in nessun altro luogo delle sue opere GALILEO ha mostrato in modo altrettanto irrefutabile tale necessità.

4) La discussione circa i meriti di GALILEO relativamente a questo soggetto proietta molta luce su alcune importanti caratteristiche del genio galileiano: per es., il suo razionalismo platonico.

2. - Il criterio costruttivo galileiano per la determinazione della forza centrifuga.

GALILEO si è occupato della forza centrifuga solo incidentalmente. Ne tratta con discreta ampiezza nei Dialoghi dei Massimi sistemi ([3]), ma nulla dice al riguardo nei Dialoghi su due Nuove

([3]) Opere di GALILEO, Edizione Nazionale, VII p. 214-244. Nella trattazione galileiana sono inserite non poche digressioni. I passi più salienti saranno citati successivamente.

Scienze, che pure trattano ex professo di Meccanica. Questa circonstanza deve essere sempre tenuta presente.

Come è ben noto, l'occasione gli è offerta da una obbiezione di TOLOMEO contro il moto della terra, obbiezione che alcuni peripatetici ritenevano insuperabile. TOLOMEO opponeva che, se si vuole interpretare l'apparente moto diurno degli astri attribuendo il moto alla terra, un punto della superficie terrestre dovrebbe rotare con tanta velocità che i corpi su essa collocati non vi potrebbero aderire ma sarebbero proiettati nello spazio dalla forza centrifuga.

La forza di questa obbiezione dipende interamente da irriflessione. L'esistenza della forza centrifuga è suggerita da facili e comuni esperienze. Basta attaccare ad una ruota un sasso e fare girare questa velocemente per rilevare subito che, quando la velocità è sufficientemente elevata, il vincolo si spezza ed il sasso è proiettato lontano. Se però ci si limita alla semplice e grossolana constatazione di questi fatti e non si esercita la riflessione critica si è condotti inconsapevolmente ad una legge errata. Si è tentati di fare dipendere la forza centrifuga unicamente dalla velocità e non dalla curvatura. Con ciò si è indotti a credere che essendo nell'ipotesi copernicana enorme la velocità di un punto abbastanza distante dall'asse di rotazione, per esempio un punto equatoriale, i corpi ivi collocati non vi potrebbero aderire.

In questo troppo sommario ragionamento si trascura il fatto che, sebbene la velocità è molto grande, la curvatura è nondimeno molto piccola. Che questa circostanza non sia trascurabile è attestato irrefutabilmente dall'esperienza. GALILEO osserva che se sono date due ruote diverse A ed A_1, il cui raggio sia rispettivamente come uno a sei, mentre la velocità angolare delle prima è tripla della seconda, la forza centrifuga che sollecita uno stesso corpo attaccato alla periferia di una di esse è maggiore nella ruota più piccola che nella grande, sebbene questa abbia la velocità periferica doppia (4). GALILEO dimostra questo anche razionalmente ma si arresta ad una proposizione qualitativa senza dare la soluzione ideale.

Il criterio costruttivo galileiano si può esporre nei termini seguenti. Differiremo a più tardi la discussione circa la sua plausibilità.

(4) Opere, VII p. 238. Qui, a dire il vero il senso non è del tutto chiaro. Soprattutto non risulta chiaramente se GALILEO abbia fatto esperienze quantitative sul soggetto.

In primo luogo GALILEO premette con assoluta chiarezza che la forza centrifuga è conseguenza diretta della legge d'inerzia, della tendenza cioè del mobile a proseguire in linea retta.

Conviene citare i passi che comprovano questa asserzione poichè critici poco avveduti hanno sostenuto che GALILEO non ha conosciuto la legge d'inerzia nella sua forma più generale.

Dalle cose dette si raccoglie che il proietto, mosso velocemente in giro dal proiciente, nel separarsi da quello ritiene impeto di continuare il suo moto per la linea retta che tocca il cerchio descritto dal moto del proiciente nel punto della separazione, per il quale moto il proietto si va sempre discostando dal centro del cerchio descritto dal moto del proiciente (5).

Per tale linea retta continuerebbe il proietto di muoversi quando dal proprio peso non gli fosse aggiunta inclinazione all'ingiù, dalla quale deriva l'inclinazione della linea del proietto (6).

Crediamo che possa bastare, ma c'è ancora un altro passo in cui indirettamente la legge d'inerzia è formulata quasi con le stesse parole di NEWTON. Dice GALILEO testualmente:

Segniamo dunque una linea perpendicolare verso il centro, e sia questa AC, *ad essa sia ad angoli retti la orizzontale* AB, *sopra la quale si farebbe il moto della proiezione e vi continuerebbe ad andare il proietto con moto equabile, quando la gravità non lo inclinasse a basso* (7).

Si confronti con l'enunciazione newtoniana: *Corpus omne perseverare in statu quo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare* (8).

Ciò premesso, GALILEO fa il seguente ragionamento (9). Questo

(5) Opere, VII p. 219.

(6) Opere, VII p. 220.

(7) Opere, VII p. 225.

(8) *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, ISAACI NEWTONI Opera Omnia, Londini 1799 - v. II p. 13.

(9) Qui cascano in considerazione due moti: uno della proiezione che comincia dal punto di contatto e segue per la tangente, l'altro dell'inclinazione all'ingiù, che comincia dal proietto e va per la segante verso il centro; ed a volere che la proiezione segua, bisogna che l'impeto per la tangente prevaglia all'inclinazione per la segante, non sta così? Opere VII, p. 222. Ma il criterio costruttivo si rileva da tutto il contesto e soprattutto da quanto è detto a pagg. 242-243.

diventa più perspicuo facendo attenzione alla seguente figura:

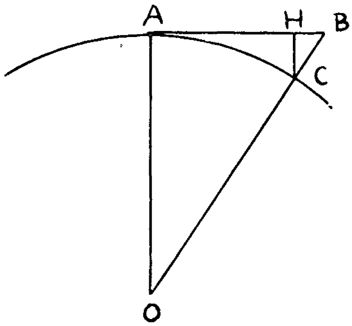

Figura 1

Supponiamo di considerare un punto materiale M collocato in un punto qualsivoglia dell'equatore terrestre (dove nell'ipotesi copernicana la forza centrifuga conseguente il moto di rotazione deve essere massima). Il punto M è trattenuto dalla sola forza di gravità. Supponiamo di .considerarlo in un dato istante nella posizione A. Se non vi fosse la gravità, M tenderebbe a proseguire lungo la tangente AB. Se invece M non fosse dotato di velocità esso tenderebbe ad andare al centro lungo AO. Supponiamo che in un dato tempuscolo Δt, in assenza di gravitazione, il punto materiale M sia capace di percorrere per inerzia il tratto di tangente AB. Perchè vi sia equilibrio tra gravità e forza centrifuga è necessario e sufficiente che, nello stesso tempuscolo Δt, esso possa percorrere, sollecitato dalla sola gravità, il tratto BC.

Questa asserzione deve considerarsi solo approssimata se Δt è finito, ma al limite, per Δt tendente a zero, essa diventa esatta.

Qualunque sia il valore di questo criterio, possiamo subito vedere che esso conduce al risultato giusto.

Si può infatti scrivere:

$$BC = \frac{(AB)^2}{2R}.$$

D'altra parte, per l'ipotesi fatta: $AB = v\Delta t$.

Se M fosse sollecitato solo dalla forza che lo trattiene, si avrebbe:

$$BC = \frac{1}{2}g(\Delta t)^2$$

Da cui:

$$\frac{1}{2}g(\Delta t)^2 = \frac{v^2(\Delta t)^2}{2R}$$

o anche:

$$g = \frac{v^2}{R} \tag{1}$$

g è l'accelerazione prodotta dalla forza f (forza centripeta) e può essere assunta come sua misura.

3. - I teoremi galileiani relativi alla forza centrifuga.

Il precedente ragionamento è in qualche modo intermedio tra quello che può essere considerato un prolungamento di quello galileliano (che tra poco esporremo) e quello che si potrebbe fare oggi.

A scanso di equivoci, dichiariamo subito che non si può pretendere da GALILEO la determinazione assoluta della forza centrifuga [10]:

$$f = m\frac{v^2}{R}. \tag{2}$$

Questa formola presuppone il concetto di massa, che divenne chiaro solo con NEWTON.

Quello che GALILEO cercava era in fondo non il valore assoluto ma quello relativo, ovvero il rapporto tra le sollecitazioni centripete alle quali è assoggettato uno stesso corpo quando è costretto ad aderire alla periferia di due ruote diverse e giranti con diverse velocità.

$$f_1 : f_2 = \frac{v_1^2}{R_1} : \frac{v_2^2}{R_2}. \tag{3}$$

Il problema può anche essere posto così: assumendo come unitaria la forza centripeta che opera su un corpo per costringerlo a descrivere una circonferenza di raggio unitario con velocità unitaria, quale è il valore che essa assume se il medesimo corpo percorre con velocità v una circonferenza di raggio R? Al problema così posto risponde bene la formola (1).

Per quanto riguarda la soluzione galileiana propriamente detta del problema i documenti più importanti sono due:

[10] È ben noto che il termine forza centrifuga non è sempre appropriato volendoci conformare alle concezioni oggi prevalenti. Riteniamo tuttavia che uno scrupoloso uso di un linguaggio rigoroso sia nel caso attuale superfluo, perciò non ce lo imporremo. Facciamo notare peraltro che GALILEO si colloca, in linea di massima, dal punto di vista dell'osservatore fisso, così che lo scopo finale delle sue considerazioni è in sostanza la determinazione della forza centripeta. Questo del resto apparirà chiaro dai passi che citeremo.

a) le pagine 242-243 dei Dialoghi dei Massimi Sistemi;

b) una pagina contenuta nei manoscritti del VIVIANI (11).

Nel documento *a*) è data la dimostrazione di un teorema che così enunciato: « Quanto più si cresce la ruota tanto si scema la causa della sua proiezione ».

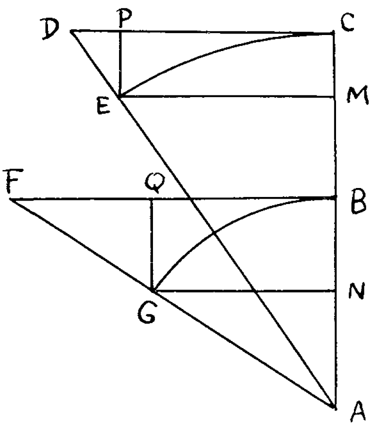

Figura 2

La figura qui allegata è quella stessa di GALILEO, completata con l'aggiunta di qualche segmento per renderla meglio comparabile con quella del documento *b*).

È opportuno riportare il testo esatto del ragionamento galileiano:

« *Siano date due ruote diseguali intorno a questo centro* A, *e della minore sia la circonferenza* BG, *e della maggiore* CEH, *ed il semidiametro* ABC *sia eretto all'orizzonte, e per i punti* B, C *segniamo le rette tangenti* BF, CD, *e negli archi* BG, CE *siano prese due parti uguali* BG, CE, *ed intendasi le due ruote essere girate sopra i loro centri con uguale velocità, sì che due mobili, li quali sariano*, v. g. *due pietre posti nei punti* B *e* C *vengano portati per la circonferenza* BG, CE *con eguali velocità, talchè nell'istesso tempo che la pietra* B *scorrerebbe per l'arco* BG *la pietra* C *passerebbe per l'arco* CE: *dico adesso che la vertigine della minor ruota è molto più potente a fare la proiezione della pietra* B, *che non è la vertigine della maggiore ruota della pietra* C.

Imperocchè dovendosi come già si è dichiarato far la proiezione

(11) Riprodotta nell'opera di R. CAVERNI, *Storia del metodo sperimentale in Italia*, Firenze 1895 - v. V p. 541.

per la tangente, quando le pietre B, C *dovessero separarsi dalle lor ruote e cominciare il moto della proiezione da i punti* B *e* C, *verrebero dall'impeto concepito dalla vertigine scagliate per le tangenti* BF, CD (p. 242).

Or considerate come per deviare la pietra della minor ruota dal moto della proiezione, che ella farebbe per la tangente BF, *e rietenerla attaccata alla ruota, bisogna che la propria gravità la ritiri per quanto è lunga la secante* FG, *ovvero la perpendicolare tirata dal punto* E *sopra la tangente* CD, *minore assai della* FG, *e sempre minore e minore secondo che la ruota si facesse maggiore: e perchè questi ritiramenti si hanno a che fare in tempi uguali, cioè mentre si passano li due archi uguali* BG, CE, *quello della pietra* B, *cioè il ritiramento* FG *doverà essere più veloce dell'altro* DE, *e però maggior forza si ricercherà per tenere la pietra* B *congiunta alla sua piccola ruota, che la pietra* C *alla sua grande, che è il medesimo che dire, che tal poca cosa impedirà lo scagliamento nella ruota grande, che non lo proibirà nella piccola. È manifesto dunque, che quanto più cresce la ruota, tanto si scema la causa della proiezione* (p. 243).

A nessuno sfugge che qui abbiamo una dimostrazione molto perspicua e correttissima ma anche purtroppo non poco indeterminata (o se volete qualitativa). Si confrontano due moti rotatori di uguale velocità periferica ma di raggio diverso. rispettivamente R_1 ed R_2. Ammesso che sia $R_1 < R_2$ si dimostra che la proiezione è più grande nella ruota più piccola. Insomma non si conclude con la proposizione precisa: $\frac{f_1}{f_2} = \frac{R_1}{R_2}$.

Nel documento *b*) abbiamo invece qualche cosa di più determinato. Questa volta il problema è alquanto modificato: si suppongono due ruote diverse ma aventi la stessa velocità angolare (quindi velocità periferiche proporzionali ai raggi rispettivi).

Riportiamo le stesse parole del VIVIANI:

Siano le due circonferenze AB, DE, *sopra le quali si intendano in* B *ed* E *posati due gravi, quali sariano due pietre, e rivolgendosi intorno al centro* O *le due ruote, veggono le dette pietre per la vertigine estruse secondo le direzioni delle tangenti* BH, EL.

Dico che il ritiramento AH. *al ritiramento* LD, *o la perpendicolare* AM, *uguale alla* BC, *alla perpendicolare* DN, *uguale alla* EF, *ha la proporzione medesima che il semidiametro* OB, *al semidiametro* OE.

Imperocchè, tirate le sottese AB, ED, *i triangoli simili danno* *che* AB *a* DE *è come* OB *ad* OE, *ed anche, che il quadrato di* OB *al quadrato di* OE. *D'altra parte il quadrato di* AB *è uguale al doppio di* BO *moltiplicato per* BC, *e il quadrato di* ED *è uguale*

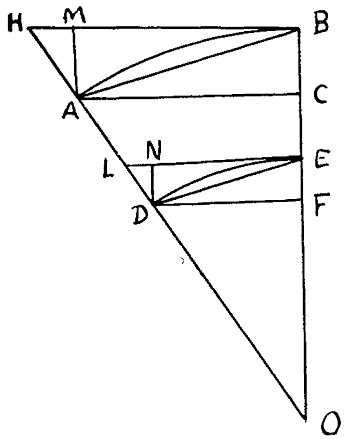

Figura 3

al doppio di EO *moltiplicato per* EF. *Dunque diremo che il quadrato di* AB *sta al quadrato di* ED, *come il rettangolo di* BO *e di* BC *sta al rettangolo di* EC *e di* EF, *ossia come il quadrato di* BO *sta al quadrato di* EO. *E qui è manifesto che* BC *ad* EF *ha ugual proposizione che* BO *ad* EO, *come era il proposito di dimostrare* ».

VIVIANI commenta così: « *Roba del gran* GALILEO *in parte copiata dalli originali, e in parte dettata da lui cieco a me* VINCENZO VIVIANI, *mentre dimoravo nella sua casa di Arcetri* ».

Come è agevole constatare, qui si ha ancora una conclusione parziale ma ben determinata: a pari velocità angolare, le forze centrifughe sono proporzionali ai raggi.

4. - Osservazioni generiche sopra l'incompiutezza dei teoremi galileiani.

Per quale motivo nel documento *a*) GALILEO si è contentato di una vaga conclusione?

A prima vista almeno, le ipotesi più verosimili sono due:

1) GALILEO quando scriveva i dialoghi dei Massimi Sistemi era dominato da altre preoccupazioni e non voleva appesantire il suo libro con dimostrazioni matematiche.

2) GALILEO non riuscì a superare difficoltà matematiche che gli sbarravano il cammino.

CAVERNI, che prospetta la questione, dà la preferenza alla seconda ipotesi. Per giustificare la sua tesi egli asserisce in sostanza che il problema *b*), il quale era effettivamente più facile, è stato risolto. « Perchè vinte, nel caso dei ritiramenti al centro sulle ruote di varia grandezza, ma ugualmente veloci, le difficoltà geometriche che si paravano nel dimostrare l'altro caso, troviamo tra i copiati del VIVIANI, il teorema di GALILEO, che i ritiramenti, o le forze centripete, o le centrifughe a loro uguali e contratte, stanno direttamente come i diametri delle ruote » ([12]).

Non discutiamo (e del resto la cosa non ha interesse) se il problema *a*) sia veramente più difficile del problema *b*). Ma possiamo dire seriamente che le difficoltà matematiche le quali sbarravano il passo alla risoluzione determinata del problema *a*) fossero davvero rilevanti? A noi non sembra.

Ed infatti tenendo presente il criterio costruttivo di GALILEO, non ci vuole molto sforzo a completare il suo teorema. Basta dare una occhiata alla figura (2) ed invocare l'elementarissimo teorema che stabilisce le tangenti essere medie proporzionali tra la secante e la parte esterna (nel caso i ritiramenti di GALILEO)

$$\overline{DE} = \frac{\overline{DC}^2}{2R_1} \qquad ; \qquad \overline{FG} = \frac{\overline{FB}^2}{2R_2}$$

Al limite il rapporto $\frac{DE}{FG}$ uguaglia, secondo GALILEO, il rapporto tra le sollecitazioni centrifughe, quindi:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\overline{DC}^2}{\overline{FB}^2} \frac{R_2}{R_1}. \tag{4}$$

Ma al limite DC e FB si confondono con gli archi, che sono per ipotesi uguali. Ne consegue:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{I_2}{R_1}. \tag{5}$$

Dove sono le difficoltà matematiche? Volendo adottare un linguaggio puramente geometrico, quale era abituale ai tempi di GALILEO e del VIVIANI, il ragionamento diventerebbe alquanto più lungo e meno perspicuo, ma non si può parlare di difficoltà

([12]) Opera citata, p. 41.

tali da spaventare GALILEO. Ma c'è di più. Il criterio costruttivo galileiano è valido evidentemente anche quando gli archi CE e BG fossero diversi, in quanto percorsi con velocità v_1 e v_2 diverse, purchè essi siano percorsi nel medesimo tempo Δt.

Essendo allora $EC = v_1 \Delta t$; $GB = v_2 \Delta t$ la formola (3) diventa

$$f_1 : f_2 : \frac{v_1^2}{R_1} : \frac{v_2^2}{R_2} \tag{3'}$$

Si ottiene cioè la formola generale della forza centrifuga. Questa costatazione ci pone di fronte ad una situazione veramente paradossale, che richiede dallo storico della scienza una adeguata spiegazione, almeno nei limiti del possibile.

Le ultime considerazioni ci obbligano a ritenere che difficoltà matematiche obbiettive non potevano impedire a GALILEO di completare il suo teorema. Ma d'altra parte anche l'altra tesi dianzi prospettata ha le sue difficoltà, che la rendono alquanto inverosimile.

Certamente si deve ammettere che in ordine agli scopi perseguiti l'assegnazione della formola (3) non era, assolutamente parlando, necessaria. Ma si può sostenere che essa non fosse neppure utite?

Non possiamo dimenticare che il carattere essenziale del messaggio che GALILEO vuole annunziare al mondo culturale è la costituzione di una scienza del moto avente l'esattezza e la precisione delle matematiche pure. Nell'introduzione ai suoi dialoghi su due Nuove Scienze egli così contraddistingue la sua opera da quella dei suoi predecessori: « *Trovo che nei trattati del moto scritti dai predecessori molte proprietà del moto e queste degne di studio (scitu digna) sono del tutto inosservate e tanto meno dimostrate. Si notano delle cose di minor conto. Leviora quedam adnotantur. Si nota per esempio che il moto dei gravi discendenti è accelerato, ma non è specificato secondo quale proporzione si faccia l'accelerazione; nessuno, per quanto io sappia, ha dimostrato che gli spazi percorsi in tempi uguali da un mobile discendente dalla quiete stanno tra loro come i numeri dispari. È stato osservato che i proiettili descrivono una certa linea curva, ma nessuno ha dichiarato che essa è una parabola* » ([13]).

Se questo è il programma galileiano, non si può non rimanere sorpresi dalla costatazione ora fatta. GALILEO dedica parecchie

([13]) Opere, VIII p. 190.

pagine alla forza centrifuga ma quando si tratta di determinarne il valore conclude con una proposizione del tutto generica.

La forza centrifuga, pari restando la velocità periferica, è magggiore se è maggiore la curvatura.

Questa dimostrazione può essere considerata sufficiente a rimuovere l'obbiezione di TOLOMEO, in quanto fa vedere che essa è fondata su un equivoco. Ma non rimuovere del tutto il dubbio, in quanto rimane pur sempre vero che nell'ipotesi copernicana la forza centrifuga esiste e non si vede chiaro immediatamente se il valore che essa assume all'equatore sia sufficiente a vincere la forza di gravità (14).

È perciò manifesto che la discussione di questo paradosso si impone assolutamente. Lo faremo nel n. 6. Prima però sentiamo la necessità di giustificare il criterio costruttivo adoperato da GALILEO e che, come abbiamo visto, sarebbe per se stesso sufficiente, prolungando il ragionamento galileiano all'esatta e precisa determinazione della forza centrifuga.

5. - Giustificazione del criterio costruttivo galileiano.

Taluni, non intendendo bene il testo galileiano e le finalità perseguite, non solo hanno creduto di vedere incompletezze nelle conclusioni, ma anche errori.

A noi interessa sopratutto mettere in chiara luce che il criterio costruttivo di GALILEO è al riparo di ogni possibile obbiezione.

DUGAS, in un suo recente scritto sulla storia della meccanica, opina che il fondamento su cui GALILEO si basa sia metafisico (15).

(14) Bisogna confessare che, da questo punto di vista, la trattazione di GALILEO è imperfetta. Anche senza utilizzare la formula precisa della forza centrifuga, GALILEO poteva limitarsi ad osservare che, per un punto M posto all'equatore terrestre, il tratto di segante BC (vedi figura) che il grave dovrebbe potere percorrere in un secondo per non essere estruso, è soltanto di pochi centimetri, mentre lo spazio che la gravità gli fa percorrere nello stesso tempo è di gran lunga maggiore (alcuni metri).

Questa lacuna è veramente sorprendente. Ma attenzione! GALILEO, poco prima, a proposito di un'altra questione analoga, aveva già fatto un calcolo simile (cfr. p. 207). Poteva quindi ritenersi dispensato dal ripeterlo.

(15) R. DUGAS, *La Mecanique au XVII Siécle*, p. 69.

« La demonstration n'est pas probante. Aussi GALILÈE appelle-t-il à son secour la methaphysique ». Da questa e da altre affermazioni si rileva che il pensiero di GALILEO non è da tutti ben compreso. DUGAS asserisce ancora: GALILÈE se trompe sur là diréction de la force centrifuge (p. 69). Questa affermazione è priva di fondamento.

A noi sembra che questo giudizio non sia giustificato.

Per rendercene conto fissiamo l'attenzione su un caso concreto che interessava GALILEO in modo speciale. Consideriamo cioè un punto materiale M posto sull'equatore terrestre, sollecitato perciò ad aderirvi dalla forza peso F. Sia R la distanza dall'asse di rotazione, v la velocità periferica di un punto equatoriale. Poniamo la seguente questione: Che relazione deve sussistere tra v ed F perchè si abbia perfetto equilibrio tra forza centrifuga e sollecitazione centripeta?

È evidente che il problema si può trasformare in quest'altro. Supponiamo che la terra sia quiescente ed il punto materiale M lanciato con velocità v. Se il valore di v è scelto convenevolmente in modo da equilibrare (come nel caso precedente) la sollecitazione centripeta, il punto M descriverebbe intorno all'asse terrestre un cerchio di raggio R.

GALILEO non ha insegnato a risolvere il problema più generale della traiettoria che percorre un grave lanciato quando si tiene conto del fatto che la forza sollecitante non è a rigore costante. Qualora questo sia ammissibile (ciò che accade solo al limite quando la regione in cui si svolge il fenomeno è piccolissima) il moto è parabolico.

Per conseguenza, nel caso attuale, potremo supporre che il moto si possa approssimare con una parabola nel primo intervallo di tempo nel quale la forza può considerarsi sensibilmente costante, ed uguale a quella che lo sollecitava all'inizio del moto. L'approssimazione è tanto più grande quanto più è piccolo l'intervallo di tempo prescelto. Facendo variare da zero ad infinito la velocità di lancio abbiamo una infinità di parabole. Nei casi limiti avremo che le parabole degenereranno rispettivamente in due moti rettilinei lungo il raggio e lungo la tangente. La parabola che approssima meglio (sempre nel primo tratto) il moto effettivo sarà la parabola osculatrice. Se la velocità di lancio è la velocità critica v di cui abbiamo dianzi parlato, la parabola che ne consegue sarà osculatrice in A al cerchio di raggio R.

Ma il moto parabolico si ottiene mediante la composizione di un moto rettilineo uniforme lungo la tangente AB e di un moto uniformemente accelerato lungo AO. Se perciò consideriamo un tempuscolo infinitesimo Δt la posizione di M si otterrà spostandoci di $AH = v\Delta t$ lungo la tangente e di HC parallelamente alla verticale AO, essendo HC lo spazio che il grave percorrerebbe sollecitato dalla gravità qualora fosse nulla la velocità iniziale. Questo punto C deve trovarsi (se v è la velocità critica) sulla circonferenza di raggio R. Poichè al limite CH e CB coincidono, si ha senz'altro il criterio costruttivo galileiano. La forza centrifuga farà equilibrio esattamente alla forza di gravità qualora questa, nel tempuscolo Δt, in cui il grave percorrerebbe per inerzia il tratto di tangente AB, è capace di fargli percorrere, con un moto uniformemente accelerato, il tratto di secante CB.

Per conseguenza a noi sembra di potere concludere che il criterio galileiano è il risultato di una illazione rigorosa ed elegante da quei principi meccanici che egli era riuscito per primo ad assodare.

Per lo meno esso non può essere considerato come metafisico, come vorrebbe il DUGAS.

6. - Spiegazione dell'incompiutezza dei teoremi galileiani.

Se la conclusione cui siamo giunti ora è vera, diventa più arduo rispondere all'altra questione già posta precedentemente. Come mai GALILEO non è giunto alla formola finale che assegna il valore esatto della forza centrifuga?

Abbiamo già visto che ciò non può essere attribuito a difficoltà matematiche. Se diciamo che GALILEO non era in quel momento particolarmente interessato alla risoluzione di tale questione diciamo certamente la verità, ma la risposta è troppo generica e non può essere considerata troppo soddisfacente.

Dobbiamo certamente concedere che quando si tratta di respingere semplicemente una soluzione errata di un certo problema, non sempre il metodo migliore consiste nel confrontarla con la soluzione esatta. Supponiamo, ad es., che qualcuno assegni una soluzione errata al problema della determinazione dell'area di un cerchio. Se voglio convincere di errore l'avversario non sempre sarà conveniente di mettere a confronto la soluzione errata con quella giusta, soluzione che per l'avversario potrebbe essere difficile a capirsi. Può invece essere più conveniente mostrare all'avversario che l'area da lui calcolata è inferiore a quella di un certo poligono regolare iscritto. (ammesso che essa sia errata per difetto). In questo caso si ottiene lo scopo finale con maggiore facilità.

Quando si giudica GALILEO non bisogna mai dimenticare che egli si trova in una posizione interamente diversa dalla nostra. Quando noi vogliamo comunicare la risoluzione di un problema ai contemporanei, presupponiamo in generale di trovarci in presenza di uditori abituati a pensare scientificamente. GALILEO quando scriveva il dialogo dei Massimi Sistemi, intendeva invece rivolgersi ad un pubblico non solo non specializzato, ma inoltre avente una indole mentale del tutto diversa dalla nostra.

Per potere convertire il mondo all'accettazione del metodo scientifico dovette adoperare uno stile che è necessariamente intermedio tra quello di un letterato e quello di uno scienziato professionale, quale oggi l'intendiamo.

Che questa spiegazione sia sostanzialmente giusta si rileva anche dal fatto che proprio in questa discussione sulla forza centrifuga, nella quale sembra che GALILEO sia alieno dalla precisione del metodo fisico-matematico, tutti i suoi sforzi convergono invece a convincere l'avversario peripatetico che la matematica è indispensabile al filosofo naturale. In quelle trenta pagine di discussione sulla forza centrifuga c'è molta più matematica di quanta non sembri a prima vista.

Riteniamo anzi che in nessun altro punto delle sue opere GALILEO riesca altrettanto efficacemente a dimostrare la necessità della cultura matematica. Crediamo perciò di fare piacere al matematico mettendo in rilievo questo aspetto della questione.

Si dice talvolta che GALILEO è un razionalista platonico. Questo giudizio deve essere accolto cum grano salis. Se si vuole dimostrare questa tesi con qualche frase tolta dalle opere di GALILEO, forse non si potrebbero trovare passi più favorevoli di quelli che si trovano nella presente discussione.

« *Lo scioglimento suo dipende da alcune notizie non meno sapute e credute da voi che da me; ma perchè elle non vi sovvengono, però non vedete lo scioglimento. Senza dunque ch'io ve lo insegni, perchè già voi lo sapete, co'l semplice ricordarvelo farò che voi stesso risolverete l'istanza* » ([16]).

Risponde SIMPLICIO: « *Io ho posto mente più volte al vostro modo di ragionare, il quale mi ha destato qualche pensiero che voi inclinate a quella opinione di Platone, che nostrum scire sit quoddam reminisci ...* » ([16]).

Queste affermazioni però non devono essere prese troppo alla lettera, come subito risulta dal contesto. Ed infatti l'interrogazione è duplice.

Prima SALVIATI, mediante interrogazioni opportune, obbliga SIMPLICIO ad ammettere che in nessun caso, qualunque sia il valore della velocità di proiezione, i gravi possono essere estrusi dalla terra rotante

Successivamente, cambiando interrogazioni e mettendo in rilievo 'alcune difficoltà che si incontrano nell'analisi infinitesimale,

([16]) Opere, VII p. 217.

induce SIMPLICIO ad ammettere che deve avvenire sempre il contrario.

Interrogazioni cosiffatte non possono essere rivolte allo scoprimento della verità (almeno direttamente). Sono rivolte piuttosto alla confusione dell'avversario.

In un certo senso si potrebbe anche dire che sono interrogazioni sofistiche, per quanto si tratti ovviamente di sofismi fatti con retta intenzione. GALILEO vuole far toccare con mano all'avversario peripatetico che in certe questioni interessanti in sommo grado la filosofia naturale, non si può fare a meno di cognizioni matematiche non volgari.

Il criterio costruttivo di cui abbiamo parlato si presta egregiamente ai sofismi poichè è basato su considerazioni infinitesimali le quali a quei tempi erano quasi nuove.

Trattandosi di apparenze, queste non possono essere mostrate al lettore compendiandone il testo, che d'altra parte non possiamo riportare interamente poichè esso è troppo lungo.

Per capire sommariamente che è possibile fare domande imbarazzanti al riguardo, si faccia di nuovo attenzione alla figura (1) GALILEO mostra prima che, affinchè la gravità impedisca la proiezione, occorre che, nel tempo in cui l'impulso iniziale farebbe percorrere ad M il tratto di tangente AB, la gravità possa fargli percorrere il tratto di secante CB. Sembra che questo non possa avvenire in quanto, mentre la velocità iniziale è finita, la velocità impressa dalla gravità nel primo tratto è al limite nulla ([17]). SIMPLICIO non è capace di rispondere che, quando tende a zero l'intervallino Δt, è vero che tende a zero la velocità con la quale M deve percorrere il tratto di secante CB, ma è anche vero che questo tende a zero.

Al contrario quando GALILEO mette in rilievo ([18]) che, al tendere a zero di Δt, il tratto di secante CB tende a zero molto più rapidamente di AB, ([19]) (è, come diremo oggi, un infinitesimo di second'ordine) sembra che la proiezione non possa avvenire mai, qualunque sia la velocità v.

Per potere rimuovere queste obbiezioni occorre avere chiaro il

([17]) Opere, VII p. 223.

([18]) Opere, VII p. 223 e seg. Che GALILEO intenda porre delle domande piuttosto dialettiche, è anche espressamente dichiarato; « *Nè io suppongo nè ho bisogno di supporre quello che non è, perchè non voglio negare che i sassi vengono scagliati, ma dico così per supposizione, acciò voi mi diciate il resto* ».

([19]) GALILEO esprime la sua distinzione in modo invero alquanto prolisso a p. 226-227.

concetto di infinitesimo, sapere distinguere bene gli infinitesimi dei diversi ordini, cose che il povero SIMPLICIO è lontanissimo dal poter fare.

Conclude perciò giustamente GALILEO: « *Or noti il Signor Simplicio quanto si possa ben filosofare in natura senza geometria* » [20]. *È forza confessare che il volere trattare le questioni naturali senza geometria è un tentare di fare quello che è impossibile ad essere fatto* » [21].

In nessun luogo delle sue opere GALILEO dimostra altrettanto efficacemente il suo assunto.

Ma, d'altra parte, in quel momento storico, la giustificazione di questa tesi non era di gran lunga più importante che la dimostrazione di qualunque proposizione scientifica particolare?

Con ciò riteniamo di avere scoperto la ragione principale per la quale GALILEO, pur avendo poste le premesse immediate per il conseguimento della formola che assegna la forza centrifuga, non vi è effettivamente pervenuto: GALILEO è stata distratto dal perseguimento di uno scopo più importante in se stesso e più conforme al programma del libro che stava scrivendo [22].

Ma dobbiamo parimenti riconoscere che questa ragione è troppo generica e che, per conseguenza. essa sola non può spiegare l'incompiutezza dei teoremi galileiani.

(20) Opere, VII p. 227.

(21) Opere, VII p. 229.

(22) Sebbene spesso GALILEO, nei Dialoghi dei Massimi Sistemi enunci solo vagamente delle teorie meccaniche che egli aveva elaborato in forma matematicamente precisa, dobbiamo escludere decisamente che possa dirsi altrettanto rispetto al problema attuale. In caso diverso non si spiegherebbe come mai, dopo alcuni anni, dettasse al VIVIANI il teorema che abbiamo dianzi riportato. Del resto se ne può avere una buona conferma dalle parole che pronuncia a conclusione della trattazione attuale. L'interlocutore SAGREDO prospetta l'ipotesi (peraltro errata) che la forza centrifuga dipenda solo dalla velocità angolare. (Opere, VII p. 224). Forse potrebbe essere vero....

SALVIATI risponde così: « Non voglio per ora che noi cerchiamo tanto oltre: basta che assai abbondantemente abbiamo (s'io non m'inganno) mostrato l'inefficacia dell'argomento, che nel primo aspetto pareva concludentissimo, e tale era stato sostenuto da grandissimi uomini: ed assai bene speso mi parrà il tempo e le parole se anco nel concetto del Signor Simplicio averò guadagnato qualche credenza, non dirò della mobilità della terra, ma almanco del non essere l'opinione di coloro che la credono tanto ridicola e stolta quanto le squadre de' filosofi comuni la tengono ». (Opere, VII p. 224).

Molto probabilmente GALILEO ha ritenuto (a torto) il problema più difficile di quanto esso fosse in realtà ([23]). Solo questa prevenzione può spiegare il fatto veramente paradossale che egli, dopo avere istituito sottili speculazioni sulla forza centrifuga, dopo avere superato quelle difficoltà che in quel momento solo un genio poteva superare, si è arrestato quando era ormai vicinissimo alla meta finale, essendo bastante per ciò l'applicazione di elementarissimi teoremi di geometria.

Volendo ricapitolare in breve quanto egli scrive in molte pagine dei Dialoghi, si potrebbe dire così: Quando si entra nel dominio degli infinitesimi, si entra in un terreno infido, che si presta al sofisma ed all'equivoco.

Questo lo dice sicuramente con lo scopo di rendere chiaro al peripatetico che la discussione di molte questioni importanti di filosofia naturale richiede cognizioni geometriche tutt'altro che superficiali.

Non potrebbe darsi che GALILEO abbia riconosciuto in ciò una difficoltà non solo per il profano, ma anche per il matematico professionale?

Questa supposizione è verosimilmente azzardata, ma non crediamo che si possa escludere decisamente.

Oltre a ciò si deve osservare che le obbiezioni contro l'ipotesi di COPÉRNICO, consistenti nel rilevare l'assenza di certi presunti effetti della rotazione terrestre, non erano suscettibili, ai tempi di GALILEO, di una risposta matematicamente precisa. GALILEO potè dimostrare vittoriosamente che tali effetti sarebbero rigorosamente nulli, qualora l'ambiente in cui si esperimenta, fosse mobile di moto puramente traslatorio. Quando si tiene conto del fatto che questa circostanza si verifica solo con grande approssimazione, si può dimostrare che tali presunti effetti sono sensibilmente irrilevanti, ma non era agevole allora mostrare come le cose vanno effettivamente. Si pensi, ad es., all'influenza del moto di rotazione terrestre sul moto dei proiettili. Per piccole gittate, quali erano realizzabili ai tempi di GALILEO, tale influenza è certo irrilevante. GALILEO mette bene in evidenza questa circostanza, ma è chiaro che non possiamo aspettarci da lui una risposta precisa ed esauriente.

Ciò posto non è difficile comprendere dove possa condurre una induzione affrettata ma quasi inevitabile. Quando la maggioranza dei problemi di una certa categoria è effettivamente difficile, non

([23]) Cfr. le parole di GALILEO citate nella nota precedente.

è agevole discriminare a priori quelli che invece sono relativamente più facili.

Così si spiega, almeno psicologicamente, lo strano fatto che GALILEO abbia lasciata incompiuta una bellissima ricerca.

Comunque sia, la trattazione galileiana della forza centrifuga, anche se incompiuta, deve essere considerata una delle più belle pagine della nostra letteratura scientifica.