Bollettino
Unione Matematica Italiana

Adriano Barlotti

Una proprietà degli n-agoni che si ottengono trasformando in una affinità un n-agono regolare.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.1, p. 96–98.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_1_96_0>

Una proprietà degli n-agoni che si ottengono trasformando in una affinità un n-agono regolare.

Nota di ADRIANO BARLOTTI (a Firenze)

Sunto. - *Si prova che condizione necessaria e sufficiente, perchè i centri degli* n-*agoni regolari costruiti sui lati di un* n-*agono convesso, esternamente od internamente ad esso, siano i vertici di un* n-*agono regolare, è che l'* n-*agono dato sia il trasformato di un* n-*agono regolare in una affinità.*

1. In una nota pubblicata in questo Bollettino (¹) ci siamo posti il problema di determinare a quali condizioni deve soddisfare un poligono convesso di n vertici perchè, come accade quando è regolare, costruendo sui suoi lati, esternamente o internamente al poligono stesso, degli n-agoni regolari i centri di questi costituiscano i vertici di un n-agono ancora regolare, e abbiamo trattato (con considerazioni puramente geometriche) i casi $n = 4$ e $n = 6$.

Vogliamo tornare sulla questione per indicarne la soluzione in generale, dimostrando il seguente teorema: *La condizione necessaria e sufficiente perchè i centri degli* n-*agoni regolari costruiti sui lati di un* n-*agono convesso, esternamente od internamente ad esso, siano i vertici di un* n-*agono regolare, è che l'* n-*agono dato sia il trasformato di un* n-*agono regolare in una affinità.*

2. Trattiamo da prima il caso in cui i poligoni regolari siano costruiti esternamente al poligono dato.

Si pensi il piano del poligono come piano di ARGAND-GAUSS,

(¹) Cfr. A. BARLOTTI, *Intorno ad una generalizzazione di un noto teorema relativo al triangolo*, Boll. U.M.I. (3), 7, 1952, pagg. 182-185.

(²) Il caso $n = 4$ esaurisce la ricerca nell'ambito dei *poligoni semiregolari equilateri ed equiangoli*. Cfr. U. BINI, *Discendenza napoleonica*, Archimede, V, 1953, pagg. 103-108 e 158-164.

cioè si associno i suoi punti ai valori di una variabile complessa. Detti $P_1, P_2, \dots, P_n (n \geq 3)$ i vertici del poligono, presi nel loro ordine, e $Q_{h,h+1} (h = 1, 2, \dots, n)$ il centro dell'n-agono regolare costruito sul lato $P_h P_{h+1}$ [3], indichiamo con α_t il numero complesso che corrisponde al punto P_t, e determiniamo il valore della variabile complessa che conduce a $Q_{h,h+1}$. Si riconosce subito che il punto di mezzo, $M_{h,h+1}$, del segmento $P_h P_{h+1}$ rappresenta il numero $\frac{\alpha_h + \alpha_{h+1}}{2}$, mentre, dall'esame del triangolo $P_h M_{h,h+1} Q_{h,h+1}$, rettangolo in $M_{h,h+1}$, segue che:

$$\overline{M_{h,h+1}\, Q_{h,h+1}} = \left| \frac{\alpha_{h+1} - \alpha_h}{2} \operatorname{tg} \frac{(n-2)\pi}{2n} \right| .$$

Il vettore $Q_{h,h+1} - M_{h,h+1}$ ha allora come componenti, rispetto agli assi cartesiani di riferimento (assi dei numeri reali e degli immaginari puri), la parte reale e il coefficiente dell'immaginario di:

$$- i \frac{\alpha_{h+1} - \alpha_h}{2} \operatorname{tg} \frac{(n-2)\pi}{2n} ,$$

e quindi il numero complesso che corrisponde a $Q_{h,h+1}$ è:

$$\frac{\alpha_h + \alpha_{h+1}}{2} - i \frac{\alpha_{h+1} - \alpha_h}{2} \operatorname{tg} \frac{(n-2)\pi}{2n} . \tag{1}$$

Se supponiamo che il poligono $Q_{1,2} Q_{2,3} \dots Q_{n,1}$ sia regolare ed abbia per centro, O, il punto zero, il numero che corrisponde al vertice $Q_{h+1,h+2}$ si ottiene moltiplicando il valore (1) per la radice n-esima principale dell'unità. Cioè:

$$\begin{aligned} (2) \quad & \alpha_{h+1} + \alpha_{h+2} - i(\alpha_{h+2} - \alpha_{h+1}) \operatorname{tg} \frac{(n-2)\pi}{2n} = \\ & = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}\right) \left[\alpha_h + \alpha_{h+1} - i(\alpha_{h+1} - \alpha_h) \operatorname{tg} \frac{(n-2)\pi}{2n}\right] \quad (h = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

da cui:

$$\alpha_h - 2 \cos \frac{2\pi}{n} \alpha_{h+1} + \alpha_{h+2} = 0 \qquad (h = 1, \dots, n). \tag{3}$$

Poichè viceversa da ciascuna di queste si risale alla (2), corrispondente al medesimo valore di h, le (3) esprimono la condizione non solo necessaria, ma anche sufficiente perchè il poligono $Q_{1,2} \dots$ $\dots Q_{n,1}$ sia regolare ed abbia il centro nel punto zero.

[3] Qui e nel seguito si intende che quando l'indice k di P_k supera n, P_k coincide con P_{k-n}.

3. Siamo adesso in grado di provare la proprietà enunciata nel n. 1. Le (3), tradotte in forma vettoriale, esprimono che fra i punti O, P_h, P_{h+1}, P_{h+2} esiste il legame:

$$(4) \qquad P_{h+2} - O = 2\cos\frac{2\pi}{n}(P_{h+1} - O) - (P_h - O) \qquad (h = 1, \ldots\, n).$$

Se, ora, $R_1R_2 \ldots R_n$ è un qualsiasi n-agono regolare il cui centro indichiamo con O', si consideri, fra il piano del poligono $P_1P_2 \ldots P_n$ e quello di $R_1R_2 \ldots R_n$, l'affinità, ω, che fa corrispondere ad O, P_1 e P_2, rispettivamente O', R_1 e R_2. Per note proprietà dell'affinità la (4) dice (facendo in essa $h = 1$) che il trasformato di P_3 nella ω è R_3. E ciò poichè la (4) stessa sussiste scrivendo O', R_h, R_{h+1} e R_{h+2} in luogo di O, P_h, P_{h+1} e P_{h+2}. In modo analogo, ponendo nella (4) successivamente $h = 2, 3, \ldots, n - 2$, si riconosce che gli omologhi di $P_5, \ldots, P_n$ nella ω sono, rispettivamente, $R_5, \ldots, R_n$. Il poligono $P_1P_2 \ldots P_n$ è allora il trasformato del poligono regolare $R_1R_2 \ldots R_n$ nell'affinità ω^{-1}, e quindi la condizione enunciata è necessaria.

La medesima condizione risulta anche sufficiente. Ciò segue immediatamente dall'osservazione già fatta che la (4), verificata quando i punti P_i sono i vertici di un n-agono regolare di centro O, rimane soddisfatta per una trasformazione affine.

Si osservi che la proprietà continua a valere anche se l' n-agono degenera opportunamente in una n-pla di punti allineati.

4. Qualora i poligoni regolari di cui si tratta vengano costruiti internamente al poligono dato, nelle considerazioni precedenti si deve sostituire al punto $Q_{h,\,h+1}$ quello, $\overline{Q}_{h,\,h+1}$, che corrisponde al numero complesso:

$$\frac{\alpha_h + \alpha_{h+1}}{2} + i\,\frac{\alpha_{h+1} - \alpha_h}{2}\operatorname{tg}\frac{(n-2)\pi}{2n}.$$

Le relazioni (2) si cambiano con le:

$$\alpha_{h+1} + \alpha_{h+2} + i(\alpha_{h+2} - \alpha_{h+1})\operatorname{tg}\frac{(n-2)\pi}{2n} =$$

$$= \left(\cos\frac{2\pi}{n} - i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n}\right)\left[\alpha_h + \alpha_{h+1} + i(\alpha_{h+1} - \alpha_h)\operatorname{tg}\frac{(n-2)\pi}{2n}\right] \quad (h = 1, 2, \ldots, n),$$

ma da queste seguono ancora le (3).

5. Notiamo infine che *i centri dei poligoni* $Q_{1,2}\,Q_{2,3} \ldots Q_{n,1}$ e $\overline{Q}_{1,2}\,\overline{Q}_{2,3} \ldots \overline{Q}_{n,1}$ coincidono con il baricentro del poligono $P_1P_2 \ldots P_n$. Essi infatti non sono altro che i trasformati, nelle relative affinità ω, del centro del poligono $R_1R_2 \ldots R_n$.