EDOARDO STORCHI

Su una nuova interpretazione del principio dell'azione potenziale.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3, Vol. **10** (1955), n.2, p. 161–165.

Zanichelli

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1955_3_10_2_161_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Zanichelli, 1955.

Su una nuova interpretazione del principio dell'azione potenziale.

Nota di Edoardo Storchi (a Milano)

Sunto. - *Si prova come la validità del principio dell'azione potenziale stazionaria sia subordinata ad una variazione che non altera l'elemento lineare di un opportuno spazio-tempo (in particolare nel caso del moto per inerzia di un sol corpuscolo ad una variazione che non altera l'elemento lineare* $ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2$ *dello spazio-tempo della relatività ristretta).*

In un lavoro alquanto recente (1) ho dimostrato che i princìpi di Hamilton e di Hölder sono in realtà caso particolare di un unico principio variazionale, facilmente deducibile dall'equazione simbolica della dinamica. Nel caso conservativo, indicata con T l'energia cinetica, con U il potenziale, con $E = T - U$ l'energia totale, con t il tempo e con λ un parametro reale a priori arbitrario, il suddetto principio si enuncia così:

« Fra tutti i moti variati che rispettano le configurazioni estreme e tali che nel passaggio dal moto naturale al moto variato risulti:

$$\delta_a [E^{\lambda-1} dt^\lambda] = 0 \tag{1}$$

il moto naturale è caratterizzato come quello che rende stazionaria l'azione:

$$A = \int_{t_0}^{t_1} [(2 - \lambda) T + \lambda U] dt \text{ ».} \tag{2}$$

Come casi particolari, corrispondenti rispettivamente a $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, seguono da questo principio i princìpi variazionali di Hölder e di Hamilton.

Un caso pure significativo, che ho ritenuto opportuno di segna-

(1) E. Storchi, *Sul principio dell'azione potenziale stazionaria*, « Rend. dell'Accademia Nazionale dei Lincei », Serie VIII, vol. XIV, fascicolo 6. Vedasi anche il testo della relativa comunicazione negli *Atti del Congresso Internazionale di Matematica*, Amsterdam (vol. I).

lare, è poi quello che si riferisce a $\lambda = 2$. Per tale valore di λ, l'azione (2) si riduce all'*azione potenziale:*

$$A = \int_{t_0}^{t_1} 2\,U dt$$

mentre, per la (1), la quantità che rimane inalterata nel passaggio dal moto naturale al moto variato è la seguente:

$$Q = E dt^2 .$$

Del corrispondente principio variazionale, che ho chiamato dell'azione potenziale stazionaria, intendo qui segnalare una nuova interpretazione che ci porta a vedere il principio stesso nello spazio-tempo.

Consideriamo dapprima il caso di un sol corpuscolo materiale P, sottoposto all'azione di forze conservative di potenziale $U = U(P)$. Sarà:

$$U(P) = \int_{\widehat{P_0 P}} \underline{F} \times dP + U(P_0) = L(P) + U(P_0)$$

avendo indicato con $\underline{F}$ il risultante delle forze conservative, con $L(P)$ il lavoro compiuto per portare il corpuscolo dalla posizione P_0 alla posizione generica P e con $U(P_0) = U_0$ il potenziale in P_0, che è una costante a priori arbitraria.

Si trova allora:

$$E dt^2 = (T - U) dt^2 = \left\{ \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt} \right)^2 \right] - \right.$$
$$\left. - U(x_1, x_2, x_3) \right\} dt^2$$

ossia:

$$E dt^2 = -\frac{1}{2} m \left\{ \left[\frac{2U_0}{m} + \frac{2L(x_1, x_2, x_3)}{m} \right] dt^2 - \left[(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \right] \right\}$$

avendo indicato con x_1, x_2, x_3 le coordinate cartesiane ortogonali del punto.

Poichè la massa m deve qui riguardarsi come una costante, la condizione variazionale (1) diviene:

$$(1') \qquad \delta_a \left\{ \left(\frac{2U_0}{m} + \frac{2L}{m} \right) dt^2 - dl^2 \right\} = 0$$

denotando dl l'elemento d'arco della generica traiettoria.

Se si dispone allora dell'arbitrarietà di U_0 ponendo:

$$\frac{2U_0}{m} = c^2 \qquad (c \text{ velocità della luce nel vuoto})$$

e si tien conto della (1'), si vede che la validità del principio dell'azione potenziale stazionaria è in realtà subordinata ad una variazione che non altera l'elemento lineare (e di conseguenza la lunghezza della linea oraria) di un opportuno spazio-tempo, quello di metrica:

$$ds^2 = c^2\left(1 + \frac{2L}{mc^2}\right)dt^2 - dl^2 . \tag{3}$$

In altri termini il principio si può enunciare così:

« Per un punto materiale soggetto a sollecitazione conservativa di potenziale $U = L + U_0 = L + \frac{1}{2}mc^2$, il moto naturale si distingue come quello che rende stazionaria l'azione potenziale $A = \int_{t_0}^{t_1} 2U dt$ in confronto a tutti quei moti variati che rispettano le configurazioni estreme e tali che nel passaggio dal moto naturale al moto variato rimanga inalterato l'elemento lineare dello spazio tempo di metrica:

$$ds^2 = c^2\left(1 + \frac{2L}{mc^2}\right)dt^2 - dl^2 \text{ ».} \tag{3}$$

Il cronotopo di metrica (3), in cui la costante $c = \sqrt{\frac{2U_0}{m}}$ rappresenta la velocità della luce nel vuoto e nell'ordinario riferimento inerziale, è riemanniano ma in generale non pseudoeuclideo perchè la (3) non è riducibile alla forma pseudopitagorica con un cambiamento di coordinate. Al cronotopo pseudoeuclideo esso si riduce se $L = 0$ se cioè il punto materiale è isolato o soggetto a forze aventi risultante nullo. La quantità:

$$v = c\sqrt{1 + \frac{2L(x_1, x_2, x_3)}{mc^2}}$$

che vi si interpreta come velocità della luce, è poi una funzione del posto, diversa in generale da c, velocità della luce in assenza di ogni causa perturbatrice (²).

(²) La causa perturbatrice che modifica la natura pseudoeuclidea del cronotopo è nel nostro caso rappresentata dal potenziale o, se si vuole, dalla forza.

Concludendo, poichè i coefficienti della metrica:

$$g_{00} = 1 + \frac{2L}{mc^2}, \quad g_{0i} = 0\,(i = 1, 2, 3), \quad g_{ik} = -\delta_{ik}\,(i, k = 1, 2, 3)\ \text{(3)}$$

dipendono dal posto, ma non dal tempo, la metrica quadridimensionale cronotopica definita dalla (3) appartiene al tipo di metrica che sta a fondamento della *statica* einsteniana.

Particolarmente significativo è poi il caso del moto per inerzia ($\underline{F} = 0$ e quindi $L = 0$). In questo caso il principio dell'azione potenziale stazionaria si riduce ad un principio del tempo stazionario. La condizione sotto la quale vale il principio diviene poi molto semplice. Infatti essa comporta una variazione che non altera l'elemento lineare di uno spazio-tempo pseudoeuclideo in cui la costante $\sqrt{\frac{2U_0}{m}} = c$ funge da velocità della luce.

L'enunciato del principio è il seguente:

« Fra tutti i moti variati che rispettano le configurazioni estreme e tali che nel passaggio dal moto naturale al moto variato rimanga inalterato l'elemento lineare dello spazio-tempo pseudoeuclideo di metrica (4):

$$ds^2 = c^2dt^2 - dl^2 \tag{4}$$

il moto naturale è caratterizzato come quello per il quale la durata del percorso risulta stazionaria ».

L'essenza del principio è quindi sostanzialmente questa: se un corpuscolo libero o vincolato e sottratto all'azione di forze attive, è in moto e si fissano le configurazioni estreme ed inoltre si impone su tutte le possibili traiettorie l'invariabilità del ds spazio-temporale dato dalla (4) (e quindi l'invariabilità della lunghezza della linea oraria), il corpuscolo nel suo moto naturale sceglie una traiettoria tale che la durata del percorso risulti stazionaria.

È poi facile estendere la nuova interpretazione del principio dell'azione potenziale stazionaria al caso di un qualsiasi sistema olonomo a vincoli bilateri e lisci ed indipendenti dal tempo.

Se $q_1, q_2 \dots q_n$ sono le coordinate lagrangiane del sistema, risulta invero in questo caso:

$$U = U(q_1, q_2, \dots q_n) \qquad T\,dt^2 = \frac{1}{2}\sum_{h,k}^{n}{}_{1}\, g_{hk}\,dq_h\,dq_k$$

(3) Indichiamo qui con δ_{ik} il simbolo di KRONECKER e con $x_0 = ct$ la coordinata temporale.

(4) Lo stesso della relatività ristretta.

avendo indicato con g_{hk} delle opportune funzioni delle q. Si ottiene allora:

$$-2E\,dt^2 = 2U(q_1, q_2 \dots q_n)\,dt^2 - \sum_1^n{}_{h,k}\, g_{hk}\,dq_h\,dq_k$$

e si vede subito come sia possibile adottare la quantità:

$$Q = -2E\,dt^2$$

quale metrica di una varietà spazio–temporale ad $n+1$ dimensioni, riemanniana ma in generale non pseudoeuclidea. Si trova così che la validità del principio dell'azione potenziale stazionaria è subordinata ad una variazione che non altera l'elemento lineare di un opportuno spazio–tempo la cui determinazione metrica dipende sostanzialmente, attraverso ai coefficienti $\frac{2U}{c^2} = g_{00}$ e g_{hk} dalle due forme di energia in gioco, l'energia cinetica e l'energia potenziale. Tale principio si formula così:

« L'azione potenziale $A = \int_{t_0}^{t_1} 2U\,dt = \int_{t_0}^{t_1} c^2 g_{00}\,dt$ corrispondente al generico moto naturale ha carattere stazionario rispetto a tutti quei moti variati di confronto che rispettano le configurazioni estreme e tali che nel passaggio dal moto naturale al moto variato non venga alterato l'elemento lineare dello spazio–tempo di metrica:

$$ds^2 = g_{00}c^2dt^2 - \sum_1^n{}_{h,k}\, g_{hk}\,dq_h\,dq_k \text{ »}. \tag{5}$$

Va poi da sè che anche nel caso attuale del sistema, come nel corrispondente caso di un sol corpuscolo, il principio relativo al moto inerziale diviene un principio del tempo stazionario. La sua validità è ancora subordinata ad una variazione che non altera l'elemento lineare dello spazio–tempo (5) nel quale però $2U = g_{00}c^2$ deve riguardarsi come una costante positiva.